



Universidad
Carlos III de Madrid

PROYECTO FIN DE CARRERA

VERIFICACIÓN
ESTRUCTURAL DE UNA
GRÚA TORRE POR EL
MÉTODO DE LOS
ELEMENTOS FINITOS

Autor: Francisco Julián Rebollo Giménez

Tutor: Alejandro Quesada González

Departamento de Ingeniería Mecánica

Titulación: Ingeniería Técnica Industrial, Mecánica

Leganés, octubre de 2010

Título: Verificación estructural de una grúa torre por el método de los elementos finitos.

Autor: Francisco Julián Rebollo Giménez

Tutor: Alejandro Quesada González

EL TRIBUNAL

Presidente: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día ____ de octubre de 2010 en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

Agradecimientos

Con el presente Proyecto Fin de Carrera finalizo mis estudios de Ingeniería Técnica Industrial. Echando la vista atrás me doy cuenta del proceso evolutivo que se ha producido en mi persona. He aprendido que no existe el fracaso, sino la “incompetencia voluntaria” (conocida comúnmente como vaguería). Se puede conseguir todo, pero teniendo ganas de luchar por ello a través del trabajo. La inseguridad, escondida bajo un halo de prepotencia, con la que llegas el primer día a la Universidad se ha convertido en una alta capacidad resolutive que me ha permitido llegar hasta donde me encuentro actualmente.

Esto, sin embargo, no lo he conseguido solo, hay mucha gente que ha estado a mi lado apoyándome y dándome ánimos en los momentos complicados. Todos ellos se merecen una mención en este proyecto y ruego me disculpen si he olvidado a alguien en las próximas líneas, porque este agradecimiento es para todo aquel que haya participado, de cualquier forma, en el proceso que ahora finalizo.

A mis padres, Julián y Asun, por ser los que me han guiado a lo largo de todos los años de mi vida y los que, a pesar de todos los errores que he cometido y seguiré cometiendo, me han apoyado y aconsejado en cualquier empresa, por estúpida que pareciera, en la que me he enrolado.

A mis abuelos, Julián y Rosi, que siempre se han preocupado por mí y me han querido transmitir su saber; y a mis otros abuelos, Paco y Tomi: sé que estáis todos los días a mi lado aunque, muy a mi pesar, no podáis celebrar la consecución de mi carrera como a mí me hubiese gustado.

Al resto de mi familia: Alberto, M^a Elena, Miguel, Elena, Julita, Josefina, Luisita y, en definitiva, a todos los presentes y ausentes que deseen pertenecer a este grupo y que siempre me han apoyado.

A todos mis amigos: Aurelio, Borja, Elena, Jessi, Paloma, Rober, Ro; por aguantar mis “chapas” y estar siempre ahí.

A toda mi “*gente*” de Pinilla del Valle, el pueblo más pequeño del Valle del Lozoya pero el más fiestero.

A mis enemigos, por haberme ayudado a superarme.

A todos los compañeros y demás miembros de la Universidad Carlos III de Madrid, mereciendo especial mención mi tutor, Alejandro Quesada González, por haber contribuido al desarrollo de este proyecto.

Sin embargo, si existe alguien que se merezca, no solo un agradecimiento, sino la dedicación de este proyecto; es mi hermana Ana. Ahora que te vas de casa, voy a echar en falta discutir contigo y la “*brasa*” que me das siempre (aunque sé que lo haces por mí bien). Las cenas van a ser más aburridas, así que me acordaré todos los días de ti. Te deseo lo mejor para los próximos años. Te echaré mucho de menos.

Muchas gracias a todos.

Resumen

A lo largo de la historia, especialmente en la ingeniería civil, el uso de todo tipo de grúas ha sido indispensable para la consecución de los objetivos marcados en la construcción de la gran mayoría de las estructuras.

Desde los primeros sistemas de elevación de pesadas cargas surgidos en la Antigua Grecia hasta nuestros días la evolución de estos sistemas ha llegado, prácticamente, a su punto más alto. El desarrollo de la ingeniería concurrente ha conducido a la posibilidad de aplicar métodos de cálculo tradicionalmente usados por las disciplinas Mecánica y Aeronáutica a la Ingeniería Civil, como el método de los elementos finitos.

En el presente Proyecto Final de Carrera se realiza un breve recorrido histórico por el desarrollo de las grúas y se profundiza en la grúa torre, analizándose los tipos, sus componentes y la forma clásica de cálculo de las mismas.

Posteriormente se explicará en profundidad qué es el método de los elementos finitos y cuál es su base teórica para, finalmente, desarrollar un modelo de elementos finitos de una grúa torre Potain MCT 88, analizándose los resultados que se obtengan y comparándose el método utilizado con la concepción clásica de cálculo de estructuras.

Abstract

Throughout the History, especially in the Civil Engineering, using every kind of cranes has been essential for the attainment of the marked objectives in the construction of the majority of structures.

From the first raising systems of heavy loads invented in the Ancient Greece to this moment, the evolution of those systems has almost reached its higher point. The development of the concurrent engineering has led to the possibility of implementing calculus methods, which were used by Mechanics and Aeronautics engineering, to the Civil Engineering as the finite elements method.

Firstly, the purpose of this project is making a short trip through the historical cranes and going deeply into different aspects of the tower crane: types, components and the classic way of calculating them.

Subsequently, the finite elements method and its theory will be explained deeply. This process will be useful for developing a finite elements model for the Potain MCT 88 tower crane. Finally, the results will be analyzed and the method will be compared to the classic understanding of calculating structures.

Índice general

AGRADECIMIENTOS.....	i
RESUMEN	iii
ABSTRACT.....	iv
1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Objetivos.....	4
1.3 Estructura del documento.	4
2. LA GRÚA TORRE: CONCEPTOS PRELIMINARES.	6
2.1 Breve historia de la grúa.	6
2.1.1 Introducción.	6
2.1.2 Grúas en la antigua Grecia.	7
2.1.3 Grúas en la antigua Roma.....	8
2.1.4 Grúas medievales.	9
2.1.5 Antecedentes históricos de la grúa torre.	10
2.2 Descripción de la grúa torre.....	11
2.2.1 Componentes de la grúa torre.	12
2.2.1.1 Mástil o torre.....	12
2.2.1.2 Flecha o pluma.....	13
2.2.1.3 Contraflecha.....	13
2.2.1.4 Contrapeso.	14
2.2.1.5 Lastre.....	14
2.2.1.6 Carro de pluma.	14
2.2.1.7 Cable de elevación y órgano de aprehensión o gancho.....	15
2.2.1.8 Motores.	15
2.2.1 Clasificación de las grúas torre.	16
2.3 Planificación de obra e instalación de la grúa torre.....	18
2.3.1 Estimación de la duración del proyecto.	19
2.3.1.1 Estudios previos.	19
2.3.1.2 Redacción de documentos.	19
2.3.1.3 Obtención de permisos y licencias.	19

2.3.1.4 Acondicionamiento de la parcela.....	20
2.3.1.5 Excavaciones y cimentaciones.	20
2.3.1.6 Ejecución de la estructura de acero de la grúa.	20
2.3.1.7 Instalación y puesta en servicio.	21
2.3.2 Estimación de la duración de ejecución del proyecto.	21
2.3.3 Instalación de la grúa torre.....	22
2.3.3.1 Montaje de la base.	22
2.3.3.2 Montaje de la torre.....	23
2.3.3.3 Montaje de la contraflecha.	23
2.3.3.4 Montaje del primer contrapeso.	24
2.3.3.5 Montaje de la flecha.....	25
2.3.3.6 Montaje del contrapeso restante.	26
2.4 Emplazamiento de grúa y distancias de seguridad.	26
2.5 Seguridad.	27
2.5.1 Introducción.	27
2.5.2 Riesgos y medidas preventivas en la grúa torre.....	28
2.5.2.1 Riesgos directos.	28
2.5.2.2 Riesgos indirectos.	30
2.5.3 Dispositivos de seguridad: limitadores.	30
2.5.4 Seguridad en el empleo de elementos bajo tensión eléctrica.	31
2.5.5 Indicadores de carga y alcances	32
2.5.6 Prohibiciones en el uso de una grúa torre	32
3. LA GRÚA TORRE: PRINCIPIOS BÁSICOS GENERALES DE CÁLCULO.....	36
3.1 Consideraciones generales y datos de partida.	36
3.1.1 Normativa.	37
3.1.2 Clasificación.....	37
3.2 Tipos de solicitaciones.....	39
3.2.1 Solicitaciones principales.....	39
3.2.2 Solicitaciones debidas a los movimientos verticales.	40
3.2.3 Solicitaciones debidas a los movimientos horizontales de traslación y a efectos de choque.	40
3.2.4 Solicitaciones debidas a los efectos climáticos.	41
3.2.4.1 Solicitud debida al viento estando la grúa en servicio.....	41
3.2.4.2 Solicitud debida al viento estando la grúa fuera de servicio.	43
3.3 Hipótesis de cálculo.....	43
3.3.1 Hipótesis I.....	44
3.3.2 Hipótesis II.	44
3.3.3 Hipótesis III.....	44
3.4 Diseño de los elementos estructurales de la grúa.	45
3.4.1 Diseño de los elementos del mástil.....	45
3.4.1.1 Hipótesis II: Pluma perpendicular a la dirección del viento estando la grúa en servicio.	45
3.4.1.2 Hipótesis II: Pluma orientada en la dirección del viento estando la grúa en servicio.	48
3.4.1.3 Hipótesis III: Pluma orientada en la dirección del viento estando la grúa fuera de servicio	48
3.4.2 Diseño de los elementos de la pluma.....	49
3.4.2.1 Caso I: Carga de servicio en punta	50
3.4.2.2 Caso II: Carga en el anclaje del tirante	51
3.4.2.3 Caso III: Carga en servicio en el centro de la pluma.	51
3.4.2.4 Caso IV: Carga en la contrapluma.	52

3.4.2.5 Caso V: Cargas horizontales.	52
3.4.3 Diseño de los elementos del castillete.	53
3.4.4 Diseño de la zapata.	53
4. APLICACIÓN DE LA NORMATIVA VIGENTE AL CÁLCULO DE LA GRÚA TORRE POTAIN MCT 88.	54
4.1 Introducción.	54
4.2 Determinación de las solicitaciones.	55
4.2.1 Determinación de las solicitaciones principales.	55
4.2.2 Determinación de las solicitaciones debidas a movimientos verticales.	56
4.2.3 Determinación de las solicitaciones debidas a movimientos horizontales y a efectos de choque.	56
4.2.4 Solicitaciones debidas a los efectos climáticos.	57
4.3 Obtención de la combinación crítica de las solicitaciones.	57
4.3.1 Caso I: carga de servicio en punta de flecha ($S'L1$).	59
4.3.2 Caso II: carga de servicio en la zona media de la pluma ($S'L2$).	64
4.3.3 Caso III: carga de servicio en la zona del castillete ($S'L3$).	66
4.3.4 Conclusión.	68
4.4 Comprobación de la resistencia estructural aplicando la combinación crítica de solicitaciones.	68
4.4.1 Resistencia de los largueros de la torre a flexión y a compresión.	69
4.4.2 Resistencia de los largueros de la torre a pandeo.	70
4.4.3 Resistencia de los cordones de la torre a pandeo.	71
4.4.4 Resistencia de pluma a flexión.	73
4.5 Conclusiones del análisis.	73
5. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.	74
5.1 Introducción.	74
5.2 Historia del método de los elementos finitos.	75
5.3 Fundamentos del análisis a través de elementos finitos.	77
5.3.1 El modelo de elementos finitos.	77
5.3.2 Los grados de libertad.	78
5.4 Principios generales aplicados a un continuo elástico.	79
5.4.1 Ecuaciones de equilibrio. Principio de los trabajos virtuales (PTV).	79
5.4.2 Funciones de interpolación.	81
5.4.3 Síntesis de las características globales.	82
5.4.4 Imposición de condiciones de contorno. Solución.	83
5.5 Tipos de elementos finitos.	83
5.5.1 Elemento barra.	83
5.5.2 Elemento viga.	84
5.5.3 Elementos planos triangular y cuadrilátero.	85
5.5.4 Elemento plano rectangular.	86
5.5.5 Elementos tetraédricos.	86
5.5.6 Elementos hexaédricos.	86
5.5.7 Elementos con bordes curvos.	87
5.5.8 Elementos axilsimétricos.	87
6. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE LA GRÚA TORRE POTAIN MCT 88.	88
6.1 Introducción.	88
6.2 Modelización con elementos viga BEAM44.	90
6.2.1 Preprocesado.	90

6.2.1.1 Definición del tipo de análisis.....	91
6.2.1.2 Definición del tipo de elemento finito a utilizar.....	91
6.2.1.3 Definición del modelo de material.....	92
6.2.1.4 Generación de la geometría del modelo.....	93
6.2.1.5 Mallado del modelo y definición de las propiedades del elemento seleccionado.....	95
6.2.2 Solución.....	99
6.2.3 Postprocesado.....	100
6.2.4 Resultados.....	100
6.2.4.1 Análisis de la deformada.....	100
6.2.4.2 Análisis de las tensiones.....	101
6.3 Modelización con elementos viga BEAM44 y placa SHELL63.....	103
6.3.1 Primera fase: Modelización de la placa.....	103
6.3.1.1 Modificación de la geometría.....	103
6.3.1.2 Análisis de resultados.....	105
6.3.2 Segunda fase: Modelización de los perfiles.....	107
6.4 Modelización con elementos viga BEAM44 y sólido SOLID45.....	109
6.4.1 Modificación de la geometría.....	110
6.4.2 Análisis de los resultados.....	111
6.4.3 Rediseño de placas y perfiles de la unión de la torre, flecha y contraflecha.....	114
6.4.3.1 Primer rediseño.....	114
6.4.3.2 Segundo rediseño.....	117
6.4.3.3 Tercer rediseño.....	119
6.4.3.4 Cuarto rediseño.....	122
6.4.3.5 Quinto y sexto rediseños.....	124
6.4.3.6 Séptimo rediseño.....	127
6.4.3.7 Resumen de los datos obtenidos en los rediseños.....	129
6.5 Análisis de estados de trabajo de la grúa.....	130
6.6 Análisis dinámico.....	133
7. CONCLUSIONES.....	137
8. TRABAJOS FUTUROS.....	139
9. BIBLIOGRAFÍA.....	141
ANEXO: APLICACIONES Y MODELOS MATEMÁTICOS DE INTERÉS EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....	143
A.1 Flexión de vigas esbeltas. Teoría de Euler-Bernoulli[15].....	143
A.1.1 Teoría básica.....	143
A.1.2 Discretización en elementos finitos de dos nodos.....	146
A.2 Flexión de vigas de Timoshenko[15].....	149
A.2.1 Teoría básica.....	149
A.2.2 Elementos finitos para la flexión de vigas de Timoshenko.....	152
A.2.3 Elemento de viga de Timoshenko cuadrático.....	155
A.3 Teoría básica de sólidos tridimensionales.[15].....	156
A.3.1 Campo de desplazamientos.....	156
A.3.2 Campo de deformaciones.....	157
A.3.3 Campo de tensiones.....	157
A.3.4 Relación tensión-deformación.....	158
A.3.5 Expresión del principio de los trabajos virtuales.....	159

A.3.6 Formulación de elementos finitos. Particularización para el elemento tetraédrico de cuatro nodos.	159
A.3.6.1 Discretización del campo de desplazamientos.	159
A.3.6.2 Matriz de deformación.	161
A.3.6.3 Matriz de rigidez del elemento.	162
A.3.6.4 Vector de fuerzas nodales equivalentes.	163
A.4 Teoría de placas de Kirchhoff.[15]	166
A.4.1 Estado de placa.	166
A.4.2 Hipótesis fundamentales.	166
A.4.3 Campo de desplazamientos.	167
A.4.4 Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos.	168
A.4.5 Expresión del principio de los trabajos virtuales.	170
A.4.6 Ecuaciones de equilibrio de la placa.	171
A.4.7 Formulación de elementos finitos.	173
A.5 Teoría de placas de Reissner-Mindlin.[15]	173
A.5.1 Hipótesis fundamentales.	173
A.5.2 Campo de desplazamientos.	174
A.5.3 Campo de deformaciones y tensiones.	175
A.5.4 Relación tensión-deformación.	176
A.5.5 Esfuerzos y deformaciones generalizadas.	177
A.5.6 Principio de los trabajos virtuales.	179
A.5.7 Formulación de elementos finitos.	179
A.5.7.1 Discretización del campo de movimientos.	179
A.5.7.2 Discretización del campo de deformaciones generalizadas.	181
A.5.7.3 Obtención de la matriz de rigidez del elemento.	181
A.5.7.4 Otros vectores de fuerzas nodales equivalentes.	182
A.6 Análisis modal: Método de Lanczos.	183
A.6.1 Conceptos previos. El método de Arnoldi.	183
A.6.2 Método de Lanczos. [16]	184
A.6.3 Método de Lanczos para sistemas simétricos. [16]	185

Índice de figuras

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.

<i>Figura 1. Fallo de los contrapesos en una grúa torre.</i>	2
<i>Figura 2. Caída del material transportado por una grúa torre sobre un vehículo.</i>	2
<i>Figura 3. Desplome de una grúa.</i>	3
<i>Figura 4. Fallo del brazo de una grúa torre.</i>	3
<i>Figura 5. Fallo del brazo de una grúa torre.</i>	3

CAPÍTULO 2. LA GRÚA TORRE: CONCEPTOS PRELIMINARES.

<i>Figura 6. Reconstrucción de un Polyspastos romano de 10,5m de altura.....</i>	8
<i>Figura 7. Reconstrucción de una grúa medieval de pórtico.</i>	9
<i>Figura 8. Antecedente de la grúa torre.</i>	10
<i>Figura 9. Componentes de la grúa torre.</i>	12
<i>Figura 10. Segmento superior de la torre.</i>	12
<i>Figura 11. Flecha o pluma.</i>	13
<i>Figura 12. Contraflecha.</i>	13
<i>Figura 13. Lastre.</i>	14
<i>Figura 14. Carro.</i>	14
<i>Figura 15. Gancho.</i>	15
<i>Figura 16. Movimientos de la grúa.</i>	16
<i>Figura 17. Grúa torre autodesplegable.</i>	17
<i>Figura 18. Grúa torre trepadora.</i>	18
<i>Figura 19. Base de la grúa torre.</i>	22
<i>Figura 20. a) Montaje de la torre inferior, b) Montaje de los tramos de torre requeridos, c) Montaje del conjunto superior.</i>	23
<i>Figura 21. Elevación de la contraflecha para el montaje de los tirantes.</i>	24
<i>Figura 22. Montaje del primer contrapeso.</i>	24
<i>Figura 23. Montaje la pluma en el suelo.</i>	25
<i>Figura 24. Elevación de la pluma.</i>	25
<i>Figura 25. Montaje del contrapeso restante.</i>	26
<i>Figura 26. Distancias y disposiciones de seguridad.</i>	27

<i>Figura 27. Dispositivos de seguridad: limitadores.</i>	31
<i>Figura 28. Diagrama de cargas y alcances.</i>	32
<i>Figura 29. Está prohibido realizar tiros oblicuos.</i>	33
<i>Figura 30. Está prohibido arrancar objetos de paredes o suelos.</i>	34
<i>Figura 31. Está prohibido el transporte de cargas por encima del personal.</i>	34
<i>Figura 32. Está prohibido balancear cargas.</i>	34
<i>Figura 33. Prohibido trabajar con la grúa si el viento impide su correcto dominio.</i>	35

CAPÍTULO 3. LA GRÚA TORRE: PRINCIPIOS BÁSICOS GENERALES DE CÁLCULO.

<i>Figura 34. Solicitaciones principales en una grúa torre</i>	39
<i>Figura 35. Cargas debidas al viento estando la grúa en servicio.</i>	42
<i>Figura 36. Cargas debidas al viento estando la grúa fuera de servicio.</i>	43
<i>Figura 37. Diagrama de cargas para el cálculo de esfuerzos en la base</i>	46
<i>Figura 38. Pandeo global del mástil por compresión.</i>	46
<i>Figura 39. Pandeo global del mástil por flexión y torsión.</i>	47
<i>Figura 40. Pandeo local de un cordón principal.</i>	47
<i>Figura 41. Diagrama de cargas para la aplicación de la hipótesis II: pluma orientada en la dirección del viento y grúa fuera de servicio</i>	48
<i>Figura 42. Diagrama de cargas para la aplicación de la hipótesis III: pluma orientada en la dirección del viento y grúa fuera de servicio</i>	49
<i>Figura 43. Diseño de la pluma: estado crítico de carga.</i>	50
<i>Figura 44. Distribución de cargas en la pluma en el caso I: carga de servicio en punta.</i>	50
<i>Figura 45. Descomposición de la carga generada por el tirante</i>	50
<i>Figura 46. Distribución de cargas en la pluma en el caso II: carga en el anclaje del tirante</i>	51
<i>Figura 47. Distribución de cargas en la pluma en el caso III: carga en servicio en el centro de la pluma.</i>	51
<i>Figura 48. Distribución de cargas en la pluma en el caso IV: carga en la contrapluma.</i>	52
<i>Figura 49. Distribución de cargas en la pluma en el caso V: cargas horizontales.</i>	52
<i>Figura 50. Cargas sobre el castillete.</i>	53
<i>Figura 51. Cargas sobre la base del mástil para el cálculo de la zapata.</i>	53

CAPÍTULO 4. APLICACIÓN DE LA NORMATIVA VIGENTE AL CÁLCULO DE LA GRÚA TORRE POTAIN MCT88.

<i>Figura 52. Solicitaciones debidas al peso propio.</i>	55
<i>Figura 53. Solicitaciones debidas a la carga de servicio.</i>	56
<i>Figura 54. Caso I.a: Diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores.</i>	59
<i>Figura 55. Caso I.b: Diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores.</i>	60
<i>Figura 56. Caso I.c: Diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores.</i>	61
<i>Figura 57. Caso I.d: Diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores.</i>	62
<i>Figura 58. Caso I.e: Diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores.</i>	62
<i>Figura 59. Caso I.f: Diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores.</i>	63
<i>Figura 60. Esfuerzos axiles y momentos flectores sobre los largueros y celosía de la torre.</i>	68

<i>Figura 61. Momentos flectores sobre los largueros y celosía de la pluma.....</i>	<i>69</i>
---	-----------

CAPÍTULO 5. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

<i>Figura 62. ANSYS, un programa de elementos finitos.....</i>	<i>76</i>
<i>Figura 63. Ejemplo de modelo sólido y modelo de elementos finitos</i>	<i>78</i>
<i>Figura 64. Viga en voladizo</i>	<i>78</i>
<i>Figura 65. Discretizado de viga en voladizo.....</i>	<i>79</i>
<i>Figura 66. Grados de libertad estructurales.....</i>	<i>79</i>
<i>Figura 67. Continuo elástico genérico.....</i>	<i>80</i>
<i>Figura 68. Elemento barra tridimensional.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 69. Elemento viga tridimensional.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 70. Elemento plano triangular (a) y cuadrilátero (b)</i>	<i>85</i>
<i>Figura 71. Combinación de elementos triangulares y cuadriláteros.....</i>	<i>85</i>
<i>Figura 72. Elemento plano rectangular</i>	<i>86</i>
<i>Figura 73. Tetraedro de cuatro (a) y de diez (b) nodos</i>	<i>86</i>
<i>Figura 74. Elemento hexaédrico</i>	<i>86</i>
<i>Figura 75. Elementos con bordes curvos</i>	<i>87</i>
<i>Figura 76. a) Cilindro bajo presión externa. b) Modelo axilsimétrico.....</i>	<i>87</i>

CAPÍTULO 6. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE LA GRÚA TORRE POTAIN MCT 88.

<i>Figura 77. Grúas Potain MCT 88 en distintas configuraciones.</i>	<i>89</i>
<i>Figura 78. Posibles configuraciones de la grúa Potain MCT 88.</i>	<i>89</i>
<i>Figura 79. Selección del tipo de análisis.</i>	<i>91</i>
<i>Figura 80. Elemento BEAM44.</i>	<i>92</i>
<i>Figura 81. Selección de elemento BEAM44 en ANSYS.....</i>	<i>92</i>
<i>Figura 82. Selección de las características del material en ANSYS.</i>	<i>93</i>
<i>Figura 83. Geometría generada a partir de líneas y puntos.....</i>	<i>94</i>
<i>Figura 84. Detalle de la zona de unión de torre, flecha y contraflecha.</i>	<i>94</i>
<i>Figura 85. Cuadro de selección de atributos de la viga.</i>	<i>95</i>
<i>Figura 86. Beam Tool.</i>	<i>95</i>
<i>Figura 87. Mesh Tool.....</i>	<i>95</i>
<i>Figura 88. Cuadro size and shape.....</i>	<i>96</i>
<i>Figura 89. Geometría de la zona de unión de torre, flecha y contraflecha aplicando el comando ESHAPE.</i>	<i>97</i>
<i>Figura 90. Geometría de la grúa aplicando el comando ESHAPE.</i>	<i>98</i>
<i>Figura 91. Aplicación de cargas a la grúa.</i>	<i>99</i>
<i>Figura 92. Definición de la tabla de datos a obtener.</i>	<i>100</i>
<i>Figura 93. Deformada a escala incrementada.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 94. Estado tensional más crítico de la estructura</i>	<i>101</i>
<i>Figura 95. Estado tensional de la unión de la torre, flecha y contraflecha.....</i>	<i>102</i>
<i>Figura 96. Grúa real: Unión de la torre, flecha y contraflecha.</i>	<i>102</i>
<i>Figura 97. Grúa real: Zona a modificar en el modelo de elementos finitos.....</i>	<i>103</i>
<i>Figura 98. Elemento SHELL63</i>	<i>104</i>
<i>Figura 99. Asignación de propiedades al elemento SHELL63</i>	<i>104</i>
<i>Figura 100. Modelo de elementos finitos con BEAM44 y SHELL63</i>	<i>105</i>

<i>Figura 101. Deformada del modelo de elementos finitos construido con elementos BEAM44 y SHELL63</i>	105
<i>Figura 102. Estado tensional más crítico del modelo de elementos finitos construido con elementos BEAM44 y SHELL63</i>	106
<i>Figura 103. Comparación de la modelización del bulón y del bulón real.....</i>	106
<i>Figura 104.Estado tensional de la placa modelizada.</i>	107
<i>Figura 105.Estado tensional tras la modelización de los perfiles con elementos SHELL63.</i>	108
<i>Figura 106.Estado tensional del conjunto de elementos placa.</i>	109
<i>Figura 107. Elemento SOLID45.....</i>	110
<i>Figura 108. Placas y perfiles críticos modelizados con elementos SOLID45</i>	111
<i>Figura 109. Estado tensional de los elementos SOLID45</i>	112
<i>Figura 110. Estado tensional de las placas</i>	113
<i>Figura 111. Estado tensional de los perfiles.....</i>	113
<i>Figura 112. Estado tensional del cordón de soldadura</i>	114
<i>Figura 113. Primer rediseño.</i>	115
<i>Figura 114. Primer rediseño: Estado tensional de las placas</i>	115
<i>Figura 115. Primer rediseño: Estado tensional de los perfiles</i>	116
<i>Figura 116. Primer rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura.....</i>	116
<i>Figura 117. Segundo rediseño.</i>	117
<i>Figura 118. Segundo rediseño: Estado tensional de las placas</i>	118
<i>Figura 119. Segundo rediseño: Estado tensional de los perfiles</i>	118
<i>Figura 120. Segundo rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura</i>	119
<i>Figura 121. Tercer rediseño.....</i>	120
<i>Figura 122. Tercer rediseño: Estado tensional de las placas.....</i>	120
<i>Figura 123. Tercer rediseño: Estado tensional de los perfiles</i>	121
<i>Figura 124. Tercer rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura</i>	121
<i>Figura 125. Cuarto rediseño.</i>	122
<i>Figura 126. Cuarto rediseño: Estado tensional de las placas</i>	123
<i>Figura 127. Cuarto rediseño: Estado tensional de los perfiles</i>	123
<i>Figura 128. Cuarto rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura.....</i>	124
<i>Figura 129. Quinto rediseño.</i>	125
<i>Figura 130. Quinto rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura.</i>	125
<i>Figura 131. Sexto rediseño: Estado tensional</i>	126
<i>Figura 132. Sexto rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura.</i>	126
<i>Figura 133. Séptimo rediseño.</i>	127
<i>Figura 134. Séptimo rediseño: Estado tensional de las placas</i>	128
<i>Figura 135. Séptimo rediseño: Estado tensional de los perfiles</i>	128
<i>Figura 136. Séptimo rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura.</i>	129
<i>Figura 137. Grúa girada 45° respecto de la posición inicial.</i>	131
<i>Figura 138. Diferentes estados tensionales de la grúa trabajando sin carga y sin contrapeso en posición inicial y girada</i>	131
<i>Figura 139. Diferentes estados tensionales de la grúa trabajando con carga máxima sin contrapeso en posición inicial y girada</i>	132
<i>Figura 140. Estado tensional de la grúa girada bajo una carga de 1.4tn. Aparición de plastificación local</i>	133
<i>Figura 141. Modo propio de vibración 1: Torsión de la torre (En azul la deformada)</i>	135

<i>Figura 142. Modo propio de vibración 4: Flexión parcial de torre y flecha.</i>	135
<i>Figura 143. Modo propio de vibración 7: Torsión de la flecha.</i>	136

ANEXO: APLICACIONES Y MODELOS MATEMÁTICOS DE INTERÉS EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

<i>Figura 144. Viga convencional de Euler-Bernoulli</i>	144
<i>Figura 145. Convenio de signos para la tensión σ_x y el momento flector M.</i>	145
<i>Figura 146. a) Elemento viga de Euler-Bernoulli de dos nodos. b) Variables nodales y funciones de forma Hermíticas</i>	146
<i>Figura 147. Teoría de flexión de vigas de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media</i>	149
<i>Figura 148. Teoría de vigas de Timoshenko. Distribución de tensiones normales y tangenciales. Convenio de signos para momento flector y esfuerzo cortante</i>	151
<i>Figura 149. Elemento viga de Timoshenko de dos nodos. Interpolación de los movimientos y funciones de forma</i>	153
<i>Figura 150. Elemento viga de Timoshenko de tres nodos. Incógnitas nodales y funciones de forma</i>	155
<i>Figura 151. Sólido tridimensional. Vector de desplazamientos en un punto</i>	157
<i>Figura 152. Convenio de signos para las tensiones en un elemento diferencial sólido tridimensional</i>	158
<i>Figura 153. Elemento tetraédrico de cuatro nodos</i>	160
<i>Figura 154. Forma explícita de la submatriz de rigidez K_{eij} para el elemento tetraédrico de 4 nodos.</i>	163
<i>Figura 155. Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros</i>	166
<i>Figura 156. Deformación del plano medio de una placa delgada y giro de la normal</i>	167
<i>Figura 157. Convenio de signos para tensiones y momentos en una placa</i>	169
<i>Figura 158. Esfuerzos en un elemento diferencial de placa</i>	171
<i>Figura 159. Teoría de placas de Reissner-Mindlin. Convenio de signos para los movimientos y giro de la normal</i>	174
<i>Figura 160. Convenio de signos para las tensiones τ_{xz} y τ_{yz}</i>	176
<i>Figura 161. Convenio de signos para los esfuerzos en una placa</i>	178
<i>Figura 162. Discretización de una placa con elementos placa de Reissner-Mindlin rectangulares de cuatro nodos.</i>	180

Índice de tablas

CAPÍTULO 2. LA GRÚA TORRE: CONCEPTOS PRELIMINARES.

<i>Tabla 1. Riesgos directos existentes y medidas preventivas en trabajos de montaje, desmontaje y mantenimiento de la grúa torre.....</i>	<i>28</i>
<i>Tabla 2. Riesgos directos existentes y medidas preventivas durante la utilización de la grúa torre.....</i>	<i>29</i>
<i>Tabla 3. Riesgos indirectos existentes y medidas preventivas durante la utilización de la grúa torre.....</i>	<i>30</i>

CAPÍTULO 6. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE LA GRÚA TORRE POTAIN MCT 88.

<i>Tabla 4. Resumen de los datos obtenidos de los rediseños</i>	<i>129</i>
<i>Tabla 5. Tensiones y desplazamientos máximos de la grúa en condiciones de trabajo.....</i>	<i>130</i>
<i>Tabla 6. Modos y frecuencias propias de vibración</i>	<i>134</i>

Capítulo 1

Introducción y objetivos.

1.1 Introducción.

Actualmente, el uso de las grúas torre en las grandes obras y construcciones de Ingeniería Civil está tan extendido que la mayoría de la población no repara ni en la complejidad que estas estructuras conlleva ni en las graves consecuencias que podría tener el fallo de las mismas.

El proceso de cálculo de las grúas, marcado por la normativa vigente, es lento y laborioso y contempla una amplia cantidad de hipótesis. Además, los procesos de análisis de cada una de las hipótesis son muy parecidos entre sí, lo que facilita la posible existencia de errores de cálculo del proyectista.

El desarrollo de aplicaciones informáticas especializadas en el cálculo de estructuras ha facilitado el trabajo a los ingenieros encargados de proyectar las grúas torre y ha disminuido la probabilidad de existencia de fallos por errores de cálculo.

Sin embargo, siguen apareciendo noticias, de manera habitual, relacionadas con accidentes de grúas torre. Entre ellos, podríamos destacar los siguientes:

- 2005, Sevilla: un obrero fallece y otro queda herido al partirse la pluma de una grúa torre y caer encima de ellos.[0]

- 24 de mayo de 2006, Madrid: tres edificios en el barrio de Tetuán son desalojados por el riesgo de caída de los contrapesos de una grúa de 50 metros (ver figura 1). [0]



Figura 1. Fallo de los contrapesos en una grúa torre.

- 20 de junio de 2006, La Felguera (Asturias): un joven sale milagrosamente ileso tras caerle encima tres barras de hierro que eran transportadas por una grúa torre (figura 2). [0]



Figura 2. Caída del material transportado por una grúa torre sobre un vehículo.

- 9 de febrero de 2007, Ciudad Real: el brazo de 2000 kilogramos de peso de una grúa torre cae sobre la calle sin causar daños. [0]
- 19 de junio de 2007, Cájar (Granada): una grúa torre transportando 56 sacos de cemento (unos 1500 kg) se desploma sobre una vivienda, una obra y tres vehículos. No se lamentan heridos (ver figura 3). [0]



Figura 3. Desplome de una grúa.

- 17 de marzo de 2008, Nueva York, EE.UU: una grúa se desploma en pleno Manhattan causando gravísimos daños materiales. No se lamentan heridos (ver figura 4). [0]



Figura 4. Fallo del brazo de una grúa torre.

- 9 de octubre de 2009, Montevideo, Uruguay: el brazo de una grúa torre se dobla cuando transportaba un contenedor con escombros (figura 5). [0]



Figura 5. Fallo del brazo de una grúa torre.

Como se ha visto, la gran mayoría de los accidentes siguen teniendo una componente relacionada con el fallo estructural importante. Esto lleva a preguntarse si dicho fallo se produce como consecuencia de errores de montaje, de uso o de diseño. Son tres variables que, probablemente, influirán conjuntamente; desde un punto de vista ingenieril, lo inmediato sería eliminar todos los errores posibles de diseño estructural.

Como consecuencia de ello, surge la idea del presente proyecto, según la cual se plantea la posibilidad de abandonar los métodos clásicos de cálculo de estructuras, y los programas informáticos destinados a ello, con el fin de intentar aplicar un método que no es habitual en Ingeniería Civil y sí en Ingeniería Mecánica y en Ingeniería Aeronáutica: el método de los elementos finitos (MEF).

1.2 Objetivos.

En base a lo anteriormente expuesto, el presente Proyecto Fin de Carrera se propone satisfacer tres objetivos principales:

1. **Verificar la integridad estructural de una grúa torre Potain MCT 88** sometida a las cargas debidas al peso que se está levantando, al contrapeso y al peso propio, en distintas posiciones de la grúa. La carga se situará en la posición más crítica para la grúa y la acción de las cargas accidentales como el viento o sismos será despreciada. Además se considerará en la verificación posibles fallos estructurales del contrapeso o negligencias del usuario (p.e. aplicar un exceso de carga a la grúa).
2. **Rediseñar** aquellos elementos que, tras un primer análisis, no permitan asegurar completamente la integridad estructural de la grúa antes mencionada.
3. **Comprobar que el método de los elementos finitos sea tan efectivo, o más, para el cálculo de las estructuras de las grúas torre que los métodos y aplicaciones informáticas tradicionales de cálculo estructural.**

1.3 Estructura del documento.

El contenido de este proyecto se encuentra dividido en nueve capítulos, el primero de ellos constituido por la presente introducción.

En el capítulo 2 se hace un breve resumen de la historia de las grúas, introduciéndose un apartado para los antecedentes históricos de las grúas torre. También en este capítulo, iniciando el análisis de estas últimas, se hace una descripción de los

componentes, una clasificación y un análisis del proceso de fabricación e instalación de las grúas torre en general. Finalmente, se estudian los aspectos relacionados con la seguridad en las grúas torre.

En el capítulo 3 se analiza de forma genérica, y sin profundizar en aspectos numéricos, el proceso de diseño y de realización de los respectivos cálculos justificativos de cada uno de los elementos de una grúa torre tomando la normativa vigente como base. El objeto de este capítulo es dar a conocer al lector la complejidad que conlleva la proyección de una grúa torre para su posterior comparación con el método de elementos finitos planteado en el presente escrito.

En el capítulo 4 se realiza una breve descripción del método de los elementos finitos dándose a conocer su historia, sus fundamentos generales, los principios que aplica el método al sólido elástico y los distintos tipos de elementos que se pueden utilizar en un análisis por MEF.

En el capítulo 5 se lleva a cabo un profundo análisis de las aplicaciones, teorías y modelos matemáticos en los que se basa el método de los elementos finitos para la resolución de modelos constituidos por elementos tipo viga, placa y sólido tetraédrico tridimensional, que son los que se utilizarán en el desarrollo del modelo de la grúa torre Potain MCT 88. En el apartado final de este capítulo se hace una breve reseña al algoritmo de Lanczos, base del algoritmo de Block Lanczos utilizado por ANSYS, aplicación informática en la cual se construye el modelo de la grúa mencionado, para la obtención de las frecuencias de los modos propios de vibración.

En el capítulo 6 se comenta qué es ANSYS y cuáles son sus posibilidades, buscando familiarizar al lector con dicho programa informático. Asimismo se explica, primero, cómo se ha modelizado la grúa torre con elementos viga y los resultados que se han obtenido de dicho modelo; segundo, la decisión de utilizar elementos placa en una determinada pieza de la estructura y las conclusiones obtenidas del análisis de este segundo modelo y tercero, la determinación de utilizar elementos sólidos tridimensionales en la misma placa que en el caso anterior y el desarrollo de una serie de rediseños como consecuencia de las deducciones obtenidas en sucesivos estudios con este último tipo de elemento. Finalmente, se concluye obteniendo un modelo fiable y seguro estructuralmente que permita considerar el mismo en distintas posiciones y estados de carga, así como obtener los modos propios de vibración principales y sus respectivas frecuencias.

En el capítulo 7 se enuncian las principales conclusiones que se pueden extraer del trabajo realizado.

En el capítulo 8 se apuntan líneas futuras de desarrollo que quedan abiertas a la finalización del trabajo.

Por último, el capítulo 9 contiene un listado de las fuentes bibliográficas empleadas en el desarrollo del proyecto.

Capítulo 2

La grúa torre: conceptos preliminares.

2.1 Breve historia de la grúa.

2.1.1 Introducción.

A través de la historia, el ser humano se ha visto en la necesidad de crear elementos que le permitan trabajar y vivir de forma más cómoda. Esta necesidad lo ha llevado a desarrollar una serie de herramientas, equipos y maquinarias acorde con sus requerimientos, siendo, el principal objetivo, lograr que estos elementos sean cada vez más perfectos, simples, útiles, polifuncionales y accesibles.

Todo esto ha demandado realizar una constante búsqueda de nuevos materiales, modelos y técnicas de trabajo. Búsqueda que se ha traducido en un desarrollo tecnológico que cuyo ritmo de crecimiento permanece hasta nuestros días.

La industria de la construcción no ha sido la excepción a este proceso de cambios. Hoy en día se cuenta con una amplia gama de elementos auxiliares, que facilitan la labor de quienes desempeñan cada una de las etapas constructivas. Ello ha venido a automatizar la mayoría de las tareas constructivas, mediante máquinas que hacen

posible que el proceso de construcción sea más rápido, fácil, seguro, de mayor calidad y de menor costo, mejorándose considerablemente la productividad.

De forma específica, en la edificación en altura ha sido especialmente fructífero el desarrollo de las grúas. Ellas han debido sufrir modificaciones para responder eficientemente a las exigencias de altura y capacidad que demanda el sector de la construcción.

Las primeras grúas fueron inventadas en la antigua Grecia y eran accionadas por hombres o animales. Estas grúas eran utilizadas principalmente para la construcción de edificios altos. Posteriormente, fueron desarrollándose grúas más grandes utilizando poleas para permitir la elevación de mayores pesos.

En la Alta Edad Media eran utilizadas en los puertos y astilleros para la estiba y construcción de los barcos. Algunas de ellas fueron construidas ancladas a torres de piedra para dar estabilidad adicional. Las primeras grúas se construyeron de madera, pero desde la llegada de la revolución industrial los materiales más utilizados son el hierro fundido y el acero.

La primera energía mecánica fue proporcionada por máquinas de vapor en el siglo XVIII. Las grúas modernas utilizan generalmente los motores de combustión interna o los sistemas de motor eléctrico e hidráulicos para proporcionar fuerzas mucho mayores, aunque las grúas manuales todavía se utilizan en pequeños trabajos o donde es poco rentable disponer de energía.

Existen muchos tipos de grúas diferentes, cada una adaptada a un propósito específico. Los tamaños se extienden desde las más pequeñas grúas de horca, usadas en el interior de los talleres, las grúas torres (sobre las que trata el presente escrito), usadas para construir edificios altos, hasta las grúas flotantes, utilizadas para construir aparejos de aceite y para rescatar barcos encallados. [1]

2.1.2 Grúas en la antigua Grecia.

Los primeros vestigios del uso de las grúas aparecen en la antigua Grecia alrededor del siglo IV, consisten en marcas de pinzas de hierro en los bloques de piedra de los templos. Estas marcas evidencian el propósito de elevación, ya que están realizadas en el centro de gravedad o en paredes equidistantes de un punto sobre el centro de gravedad de los bloques.

La introducción del torno y la polea pronto conduce a un reemplazo extenso de rampas como los medios principales del movimiento vertical. Durante los siguientes doscientos años, los edificios griegos contemplan un manejo de los pesos más livianos pues la nueva técnica de elevación permitió la carga de muchas piedras más pequeñas (por ser más práctico) que pocas piedras más grandes, contrastando con el período arcaico y su tendencia a los tamaños de bloque cada vez mayores. Así, por ejemplo, la práctica de erigir grandes columnas monolíticas fue abandonada prácticamente para luego usar varias ruedas que conforman cada una de ellas.

Aunque las circunstancias exactas del cambio de la rampa a la tecnología de la grúa siguen siendo confusas, se ha considerado que las condiciones sociales y políticas volátiles de Grecia hicieron, para los profesionales de la construcción, más convenientes el empleo de los equipos pequeños que de los instrumentos grandes controlados por manos inexpertas. De este modo, se prefirió la grúa a la rampa, pues esta última, que había sido habitual en las sociedades autocráticas de Egipto y Asiria, requería mucho trabajo.

Alrededor del siglo IV, los tamaños de bloque en los templos griegos comenzaron, de nuevo, a parecerse a sus precursores arcaicos, este hecho parecía indicar que se debía haber encontrado la forma de usar una polea compuesta sofisticada en las obras griegas más avanzadas del momento. [1]

2.1.3 Grúas en la antigua Roma.

El apogeo de la grúa en épocas antiguas llegó antes del Imperio Romano, cuando se incrementó el trabajo de construcción en edificios que alcanzaron dimensiones enormes. Los romanos adoptaron la grúa griega y la desarrollaron.

La grúa romana más simple, el Trispastos, consistió en una horca de una sola viga, un torno, una cuerda, y un bloque que contenía tres poleas. Teniendo así una ventaja mecánica de 3:1, se ha calculado que un solo hombre que trabajaba con el torno podría levantar 150 kilogramos ($3 \text{ poleas} \times 50 \text{ kg} = 150$), cuando 50 kilogramos representan el esfuerzo máximo que un hombre puede ejercer durante un período de tiempo largo.



Figura 6. Reconstrucción de un Polyspastos romano de 10,5m de altura.

Tipos más pesados de grúa ofrecieron cinco poleas (Pentaspastos) o, en el caso más grande, un sistema de tres por cinco poleas (Polyspastos) con dos, tres o cuatro mástiles, dependiendo de la carga máxima. El Polyspastos (ver figura 6), cuando era operado por cuatro hombres en ambos lados del torno, podía levantar hasta 3000 kg ($3 \text{ cuerdas} \times 5 \text{ poleas} \times 4 \text{ hombres} \times 50 \text{ kilogramos} = 3000 \text{ kg}$). En caso de que el torno fuera sustituido por un acoplamiento, la carga máxima incluso se dobló a 6000 kg con solamente la mitad del equipo, puesto que el acoplamiento posee una ventaja mecánica superior debido a su diámetro más grande. Esto significó que, con respecto a la

construcción de las pirámides egipcias, donde eran necesarios cerca de 50 hombres para mover un bloque de piedra de 2,5 toneladas por encima de la rampa (50 kg por personas), la capacidad de elevación del Polyspastos romano demostró ser 60 veces más alta (3000 kg por persona).

Sin embargo, los edificios romanos ofrecen numerosos bloques de piedra mucho más pesados que éstos, lo que indica que la capacidad de elevación total de los romanos iba mucho más allá que la de cualquier grúa sola. En el templo de Júpiter en Baalbek, los bloques pesan hasta 60 tn cada uno, y las cornisas de la esquina incluso hasta 100 tn, todas levantadas a una altura de 19 metros sobre la tierra. En Roma, el bloque capital de la columna Trajana pesa 53,3 tn que tuvieron que ser levantadas a una altura de 34 m.

Se asume que los ingenieros romanos lograron la elevación de estos pesos extraordinarios por dos medios: primero, según lo sugerido por Herón, una torre de elevación fue instalada y cuatro mástiles fueron arreglados en la forma de un cuadrilátero con los lados paralelos (no muy diferente a una torre, pero con la columna en el medio de la estructura). En segundo lugar, una multiplicidad de cabrestantes (que, aunque tienen un cociente de palanca más bajo que los acoplamientos, se podía instalar en mayor número, haciéndolo funcionar por más hombres o animales) fue colocada en la tierra alrededor de la torre. La capacidad de elevación máxima de un solo cabrestante se puede establecer por el número de agujeros del hierro en el monolito. En el caso de los bloques del arquitrabe de Baalbek, que pesan entre 55 y 60 t, ocho agujeros sugieren un peso de 7,5 tn. La elevación de tales pesos pesados es una acción concentrada que requirió una gran cantidad de coordinación entre los grupos de trabajo que aplicaban la fuerza a los cabrestantes. [1]

2.1.4 Grúas medievales.

La grúa de acoplamientos fue reintroducida en una escala grande después de que la tecnología hubiera caído en desuso en Europa occidental con el fallecimiento del Imperio Romano Occidental. La referencia más cercana a un acoplamiento reaparece en la literatura archivada en Francia cerca del 1225, seguido por una pintura iluminada en un manuscrito probablemente también de origen francés con fecha de 1240.



Figura 7. Reconstrucción de una grúa medieval de pórtico.

En la navegación, las aplicaciones más cercanas de las grúas de puerto se documentan para Utrecht en 1244, Amberes en 1263, Brujas en 1288 y Hamburgo en 1291, mientras que en Inglaterra el acoplamiento no se registra antes de 1331.

Generalmente, el transporte vertical era más seguro y más barato hecho por las grúas (ver figura 7) que por otros métodos comunes para la época. Las áreas de puertos, minas, y, particularmente, los edificios (en donde la grúa de acoplamientos desempeñó un papel importante en la construcción de las catedrales góticas altas) eran las principales zonas de funcionamiento. [1]

2.1.5 Antecedentes históricos de la grúa torre.

Las grúas se han ido optimizando dando origen, finalmente, a una máquina de funcionamiento electromecánico que es capaz de levantar y trasladar materiales tales como hormigón, madera, acero, paneles, etc. mediante un gancho suspendido de un brazo horizontal giratorio, como cualquier grúa pluma, pero con la diferencia de que además está provista de una torre vertical, sobre la cual se monta la pluma de la grúa, permitiendo que pueda ser utilizable a diferentes alturas, ya que consiente la adición de tramos a la torre, según se requiera, viniendo a solucionar el principal limitante de las grúas.

Esta nueva máquina es la que hoy se conoce como **grúa torre**, la que desde sus primeras apariciones, vino a revolucionar por completo las técnicas de construcción existentes, logrando consolidarse como un elemento imprescindible no sólo en la industria de la construcción, sino que también en otras actividades como son servicios portuarios y construcción naval.

Las primeras grúas torre se fabricaron en Europa, en la década de los 50. El sector de la construcción, en ese entonces, tuvo que buscar nuevas herramientas para hacer frente a la reconstrucción que tuvo que llevarse a cabo después de la Segunda Guerra Mundial.



Figura 8. Antecedente de la grúa torre.

Los primeros elevadores parecidos a las grúas fueron realizados a partir de una torre con pilote y el brazo constituido por una plataforma fija (ver figura 8). Sólo a principios de los años 60 se comenzaron a construir grúas torre con rotación en alto.

Las grúas torre han evolucionado bastante desde entonces, ya que el propósito fundamental ha sido crear diseños cada vez más versátiles, de mayor rendimiento y de mayor fiabilidad, resolviendo específicamente problemas concretos de aplicación. Este hecho ha llevado a la creación de distintos tipos de grúas torre acordes a las condiciones y exigencias del lugar mismo donde trabajará la misma (accesibilidad, tipo de terreno, espacio, tiempo, etc.). Por otro lado, las constantes exigencias de tamaño y capacidad, han demandado también la creación de avanzados sistemas de seguridad, control y manejo.

Un gran avance en las grúas torre, ha sido el diseño independiente de conjuntos o módulos, reemplazando la concepción de una grúa como unidad. Esto permite combinar los distintos elementos de la grúa, de acuerdo con las condiciones de trabajo brindando además, la posibilidad de modificar características iniciales, de forma sencilla, en cualquier momento y con una mínima inversión. [1]

2.2 Descripción de la grúa torre.

La grúa torre es un aparato de elevación de funcionamiento discontinuo, destinado a elevar y distribuir las cargas mediante un gancho suspendido de un cable, desplazándose por un carro a lo largo de una pluma.

Es orientable y su soporte giratorio se monta sobre la parte superior de una torre vertical, cuya parte inferior se une a la base de la grúa. Suele ser de instalación temporal, y está concebida para soportar frecuentes montajes y desmontajes, así como traslados entre distintos emplazamientos. Se utiliza sobretodo en las obras de construcción.

Este tipo de grúa está constituido esencialmente por una torre metálica, con un brazo horizontal giratorio, y los motores de orientación, elevación y distribución o traslación de la carga. (ver figura 9)

La torre puede empotrarse en el suelo, inmovilizada sin ruedas (como es el caso del modelo objeto de estudio del presente proyecto) o bien desplazarse sobre vías rectas o curvas. Las operaciones de montaje deben ser realizadas por personal especializado. Asimismo las operaciones de mantenimiento y conservación se realizarán de acuerdo con las normas dadas por el fabricante. [1, 2]

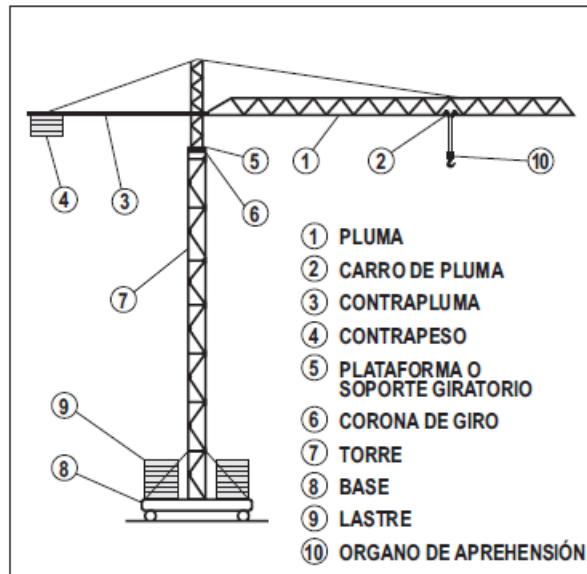


Figura 9. Componentes de la grúa torre.

2.2.1 Componentes de la grúa torre.

2.2.1.1 Mástil o torre.

El mástil o torre consiste en una estructura de celosía metálica de sección normalmente cuadrada, cuya principal misión es dotar a la grúa de altura suficiente. Normalmente está formada por módulos de celosía que facilitan el transporte de la grúa. Para el montaje se unirán estos módulos, mediante tornillos, llegando todos unidos a la altura proyectada. Su forma y dimensión varía según las características necesarias de peso y altura.



Figura 10. Segmento superior de la torre.

En la parte superior del mástil se sitúa la zona giratoria que aporta a la grúa un movimiento de 360° horizontales. También según el modelo puede disponer de una cabina para su manejo por parte de un operario (ver figura 10).

Para el acceso de operarios dispondrá de una escala metálica fijada a la estructura. [1,2]

2.2.1.2 Flecha o pluma.

La flecha es una estructura de celosía metálica de sección normalmente triangular, cuya principal misión es dotar a la grúa del radio o alcance necesario (ver figura 11). Su forma y dimensión varía según las características necesarias de peso y longitud. También se le suele llamar pluma.

Al igual que el mástil suele tener una estructura modular para facilitar su transporte.

Para desplazarse el personal especializado durante los trabajos de montaje, revisión y mantenimiento a lo largo de la flecha dispondrá de un elemento longitudinal, cable fiador, al que se pueda sujetar el mosquetón del cinturón de seguridad. [1,2]



Figura 11. Flecha o pluma.

2.2.1.3 Contraflecha.

La longitud de la contraflecha (ver figura 12) oscila entre el 30 y el 35 % de la longitud de la pluma. Al final de la contraflecha se colocan los contrapesos. Esta unido al mástil en la zona opuesta a la unión con la flecha. Posee una base robusta formada por varios perfiles metálicos y encima de ellos existe una especie de pasarela para facilitar el paso del personal desde el mástil hasta los contrapesos. Las secciones de los perfiles dependerán de los contrapesos que se van a colocar. [1, 2]



Figura 12. Contraflecha.

2.2.1.4 Contrapeso.

Se conoce como “contrapeso” a las estructuras de hormigón prefabricado que se colocan en la contraflecha (ver figura 12) para estabilizar el peso y la inercia que se produce en la flecha grúa. Deben estabilizar la grúa tanto en reposo como en funcionamiento.

Tanto estos bloques como los que forman el lastre deben de llevar identificado su peso de forma legible e indeleble. [1, 2]

2.2.1.5 Lastre.

El lastre puede estar formado por una zapata enterrada o bien por varias piezas de hormigón prefabricado en la base de la grúa (ver figura 13). Su misión es estabilizar la grúa frente al peso propio, al peso que pueda trasladar y a las condiciones ambientales adversas (viento). [1, 2]



Figura 13. Lastre.

2.2.1.6 Carro de pluma.

Otro de los componentes de la grúa torre es el carro de pluma. Consiste en un carro que se mueve a lo largo de la flecha a través de unos carriles (ver figura 14). Este movimiento da la maniobrabilidad necesaria en la grúa. Es metálico, de forma que soporte el peso a levantar. [1, 2]



Figura 14. Carro.

2.2.1.7 Cable de elevación y órgano de aprehensión o gancho.

El cable de elevación es una de las partes más delicadas de la grúa y, para que dé un rendimiento adecuado, es preciso que sea usado y mantenido correctamente. Debe estar perfectamente tensado y se realiza un seguimiento periódico para que, durante su enrollamiento en el tambor no se entrecruce, ya que daría lugar a aplastamientos.

El gancho está provisto de un dispositivo que permite la fácil entrada de cables de las eslingas y estrobos, y de forma automática los retenga impidiendo su salida si no se actúa manualmente, tal y como se puede observar en la figura 15. [1, 2]

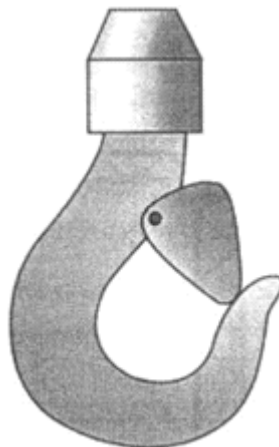


Figura 15. Gancho.

2.2.1.8 Motores.

La grúa más genérica está formada por cuatro motores eléctricos que le permiten realizar los cuatro movimientos que se observan en la figura 16. [1, 2]

- Motor de elevación: permite el movimiento vertical de la carga.
- Motor de distribución: da el movimiento del carro a lo largo de la pluma
- Motor de orientación: permite el giro de 360°, en el plano horizontal, de la estructura superior de la grúa.
- Motor de translación: desplazamiento de la grúa, en su conjunto, sobre carriles. Para realizar este movimiento es necesario que la grúa este en reposo.

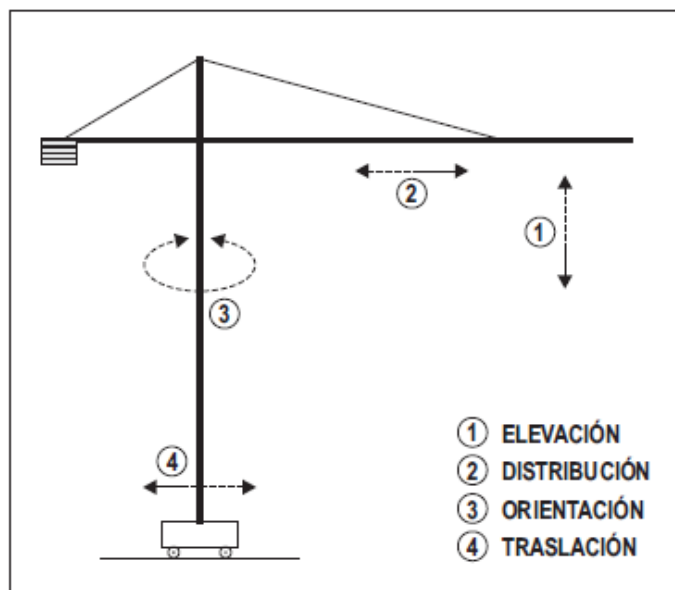


Figura 16. Movimientos de la grúa.

2.2.1 Clasificación de las grúas torre.

Esta clasificación está basada en la instrucción técnica MIE-AEM-2. Dentro de los tipos aquí descritos pueden hacerse nuevas divisiones dependiendo de la capacidad de carga, la altura o la longitud de alcance de la flecha. [1, 2]

- Grúa torre fija o estacionaria: Grúa torre cuya base no posee medios de translación o que poseyéndolos no son utilizables en el emplazamiento, o aquellas en que la base es una fundación o cualquier otro conjunto fijo.
- Grúa torre desplazable en servicio: Es aquella cuya base está dotada de medios propios de translación sobre carriles u otros medios y cuya altura máxima de montaje es tal que sin ningún medio de anclaje adicional sea estable tanto en servicio, como fuera de servicio, para las solicitaciones a las que vaya a estar sometida.
- Grúa torre desmontable: Grúa torre, concebida para su utilización en las obras de construcción u otras aplicaciones, diseñada para soportar frecuentes montajes y desmontajes, así como traslados entre distintos emplazamientos.
- Grúa torre autodesplegable: Grúa pluma orientable en la que la pluma se monta sobre la parte superior de una torre vertical orientable, donde su parte inferior se une a la base de la grúa a través de un soporte giratorio y que está provista de los accesorios necesarios para permitir un rápido plegado y desplegado de la torre y pluma (ver figura 17).

- Grúa torre autodesplegable monobloc: Grúa autodesplegable cuya torre está constituida por un solo bloque y que no requiere elementos estructurales adicionales para su instalación, pudiendo ir provista de ruedas para facilitar su desplazamiento.
- Grúa torre trepadora: Grúa torre instalada sobre la estructura de una obra en curso de construcción y que se desplaza de abajo hacia arriba por sus propios medios al ritmo y medida que la construcción progresa (ver figura 18).
- Grúa ciudad (*City crane*): Este tipo de grúas (al cual corresponde la grúa torre que se analiza en este proyecto) se está usando especialmente, para el trabajo de construcción en lugares ya edificados, como en la renovación de edificios en las zonas antiguas de las ciudades, bloques cercanos entre sí, restauración de fachadas, enmaderado de edificios históricos. Se necesitan grúas con una tecnología capaz de resolver los problemas específicos de este tipo de construcciones y que, a modo de ejemplo, pueden ser: poco espacio entre el edificio y la calle con una acera muy pequeña, calles muy estrechas, montajes a realizar en patios, huecos de ascensores o lado opuesto de la calle y ello con dificultades adicionales como que el tráfico no pueda ser cerrado totalmente o durante muy poco tiempo, suelos de escasa capacidad para soportar cargas, etc.

Estas grúas están especialmente concebidas para que su montaje sea efectuado con un número de secuencias muy reducido y deben ofrecer las siguientes características básicas:

- Base que ocupe un reducido espacio y que además sea capaz de soportar las cargas por esquina a que han de estar sometidas. Estas bases normalmente tienen forma de cruz y deben ser fácilmente convertibles en carretón para instalar sobre vía.
- Torres de sección reducida y compacta para permitir su instalación en huecos muy reducidos y para ahorrar espacio de transporte.

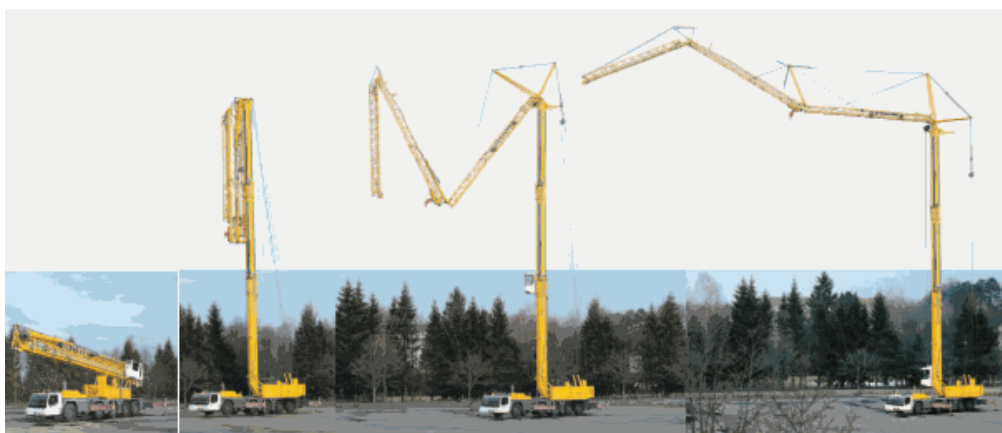


Figura 17. Grúa torre autodesplegable.



Figura 18. Grúa torre trepadora.

2.3 Planificación de obra e instalación de la grúa torre.

Dentro de la planificación de un proyecto en el que es necesario la utilización de una grúa torre se van a considerar tres apartados fundamentales que, dado que este tipo de proyectos incluyen una gran cantidad de actividades, no tienen por qué tener el diseño, fabricación o instalación de la grúa como objeto principal [2]:

- En primer lugar se procederá a la estimación de la duración, redacción y obtención de permisos para la realización del proyecto.
- En segundo lugar se realizará una estimación de la duración de ejecución del proyecto.
- Por último se procederá a la estimación para la realización de las instalaciones y pruebas a efectuar para su funcionamiento.

2.3.1 Estimación de la duración del proyecto.

La estimación se realizará estableciendo en primer lugar, las tareas más importantes en la ejecución del proyecto en el cual es necesaria la utilización de una grúa torre, así como su duración estimada y las correspondientes superposiciones entre tareas, es decir, posible ejecución simultánea, en parte o en su totalidad, de más de una tarea, si fuese posible.

Posteriormente, una vez estimadas las duraciones de las tareas parciales y sus superposiciones, si los hubiera, se calculará o estimará la duración de ejecución del proyecto en su totalidad.

Se analizan, una por una, las distintas actividades, tareas, diferenciadas dentro del proyecto, desde su estudio inicial, hasta la ejecución final de las obras.

En todo proyecto de un diseño, fabricación o instalación se distinguen las actividades o tareas principales que se mostrarán en los siguientes apartados. [2]

2.3.1.1 Estudios previos.

Estos tipos de estudios son llevados a cabo por la propiedad y el proyectista conjuntamente. Se trata básicamente de analizar el objeto que da origen al proyecto, estudiando sus problemas, alternativas y propósitos del mismo, estableciendo finalmente los requisitos y objetivos que se pretenden, obteniéndose así la solución idónea para el problema suscitado. [2]

Esta tarea es previa a cualquier otra, y hasta que no está concluida no se dará comienzo a ninguna de las siguientes tareas. Se estima la duración de la misma en una semana. [2]

2.3.1.2 Redacción de documentos.

Una vez concluida la anterior tarea y obtenidas las conclusiones necesarias de la misma, se puede pasar a la realización y cálculo por escrito del proyecto. Es decir, se procede a la redacción de la memoria, pliego de condiciones, presupuesto y planos, que definirán la totalidad del proyecto. La duración estimada de esta tarea es de cuatro semanas. [2]

2.3.1.3 Obtención de permisos y licencias.

Esta tarea es solapable con la anterior, dado que ambas actividades no se interfieren entre sí. Únicamente se precisa que se encuentren realizados y calculados unos primeros datos y planos generales. Una vez obtenidos los mismos se puede comenzar con las gestiones para la obtención de permisos y licencias.

Aunque, claro está, para la obtención de licencias definitivas debe presentarse el proyecto con los documentos ya visados, para lo cual es preciso haber concluido la tarea de redacción de documentos.

Se estima la duración de esta tarea en seis semanas pudiendo comenzarse con las mismas tres semanas después de iniciada la tarea de redacción de documentos. [2]

2.3.1.4 Acondicionamiento de la parcela.

La urbanización de la parcela será la primera tarea para la ejecución del proyecto. Se desbrozará y limpiará el terreno de la parcela, procurando que el material retirado se coloque de forma que no suponga un peligro para las construcciones existentes hasta su traslado o eliminación.

Es una tarea crítica, se estima su duración de una semana. [2]

2.3.1.5 Excavaciones y cimentaciones.

Se procederá mediante medios mecánicos a la realización de nivelaciones de la obra y excavaciones para las cimentaciones.

En esta fase se cubrirán los requerimientos necesarios para la ejecución de la excavación para la cimentación de este proyecto y el acondicionamiento del fondo de la excavación en función de la carga admisible del terreno considerado en los cálculos. De no existir informe geotécnico, se deberán realizar las pruebas y ensayos necesarios para garantizar que el comportamiento del terreno es el supuesto en los cálculos y si esto no es así, se volverá a calcular todas las cimentaciones o se realizarán las modificaciones necesarias para garantizar la estabilidad de la estructura.

Se procederá a la colocación de armaduras y vertido de hormigón. Se estima su duración en 4 días. [2]

2.3.1.6 Ejecución de la estructura de acero de la grúa.

La ejecución de las estructuras de acero de la grúa en el taller es por su volumen y magnitud la más importante del proyecto. Se ajustará a lo indicado en el Código Técnico de la Edificación (CTE).

A partir de los planos de proyecto, deberán realizarse los correspondientes planos de taller como indica dicha norma.

Antes del marcado, corte y conformado se pondrá especial atención en que todos los productos (perfiles, chapas, etc.) tengan la forma exacta deseada, sea recta o curva.

Las operaciones de corte para adaptar las piezas a las medidas establecidas se realizarán mediante sierra mecánica para espesores inferiores a 15 mm, y utilizando el oxicorte en espesores superiores, tomando en este caso las precauciones necesarias para

que el corte sea regular y para que las tensiones o transformaciones de origen térmico que se ocasionen no produzcan perjuicio. Se encuentra expresamente prohibido el corte mediante arco eléctrico.

Las piezas deberán contar con los biseles, rebajes y perforaciones necesarios que se indiquen en el plano de taller realizándose según lo establecido en el CTE

Las soldaduras se realizarán según los procedimientos establecidos en la CTE. Se adoptarán las debidas precauciones para proteger los trabajos de soldadura contra el viento y, muy especialmente, contra el frío, debiendo ser suspendidos sin excusa alguna cuando la temperatura descienda por debajo de los cero grados centígrados (0° C). Queda prohibido acelerar el enfriamiento de las soldaduras con métodos artificiales.

La duración estimada de esta tarea es de cuatro semanas. [2]

2.3.1.7 Instalación y puesta en servicio.

Para la entrada en servicio de la instalación y que esta quede en condiciones de entrar en funcionamiento, se requiere la ejecución, instalación y verificación de otras pequeñas partes de la misma, todo lo cual queda englobado en esta tarea de puesta en servicio.

Para la realización de esta tarea se requiere que todas las restantes se encuentren concluidas totalmente, es decir, esta no se solapa con ninguna otra.

La duración estimada de la misma es de un día.

Una vez definidas todas las tareas, así como su duración, sólo resta el cálculo de la duración estimada de ejecución del conjunto del proyecto. [2]

2.3.2 Estimación de la duración de ejecución del proyecto.

Se utilizará un gráfico de Gantt o de barras, donde se representarán todas y cada una de las tareas que componen la totalidad del proyecto. Del análisis del gráfico de Gantt se extrae la duración total estimada del proyecto, quedando claramente indicadas las duraciones de cada una de las tareas así como las superposiciones que se puedan presentar.

Señalar que la semana "1" de un gráfico de Gantt o de barras se entiende como aquella en la que la propiedad encarga al proyectista la realización del proyecto, punto de partida desde el cual se comienza con la primera tarea: el estudio previo. [2]

2.3.3 Instalación de la grúa torre.

Durante la instalación de una grúa torre se deben de tener en cuenta los siguientes criterios:

- El usuario es responsable de la ejecución de los apoyos.
- El montaje de la grúa se realizará por personal cualificado, guiándose para ello de las instrucciones.
- Dispondrá de una orden de trabajo, donde vendrán indicados los datos de la grúa y características del montaje.
- Dicho personal dependerá de un técnico titulado, quien planificará y se responsabilizará del trabajo a realizar, extendiendo al finalizar el montaje el certificado correspondiente.
- Se contará con la ayuda de una grúa móvil para el montaje de la grúa torre.

En los siguientes apartados se describe brevemente el montaje e instalación de la grúa torre, siguiendo los criterios antes descritos. [2]

2.3.3.1 Montaje de la base.

La preparación de la base corre a cuenta del cliente del montador de la grúa torre, por tanto éste se encuentra con la base ya construida; en todo caso, antes de empezar el montaje de la grúa se comprobará la nivelación (los agujeros dentro de una tolerancia de ± 2 mm) de la correspondiente base de apoyo zapata de apoyo (ver figura 19). [2]

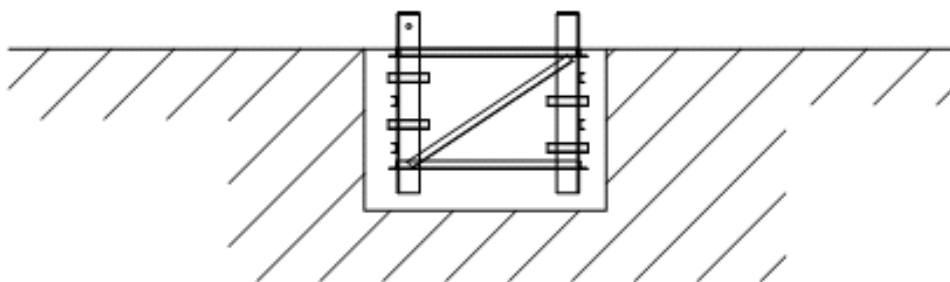


Figura 19. Base de la grúa torre.

2.3.3.2 Montaje de la torre.

En primer lugar se monta la torre inferior y, posteriormente, con la ayuda de la grúa móvil auxiliar, se montan los tramos requeridos y el conjunto superior (torre asiento de pista, punta de torre, mecanismos, etc.) que servirán de unión para flecha y contraflecha y aportarán movilidad al conjunto de la grúa torre. La descripción del montaje se muestra en la figura 20. [2]

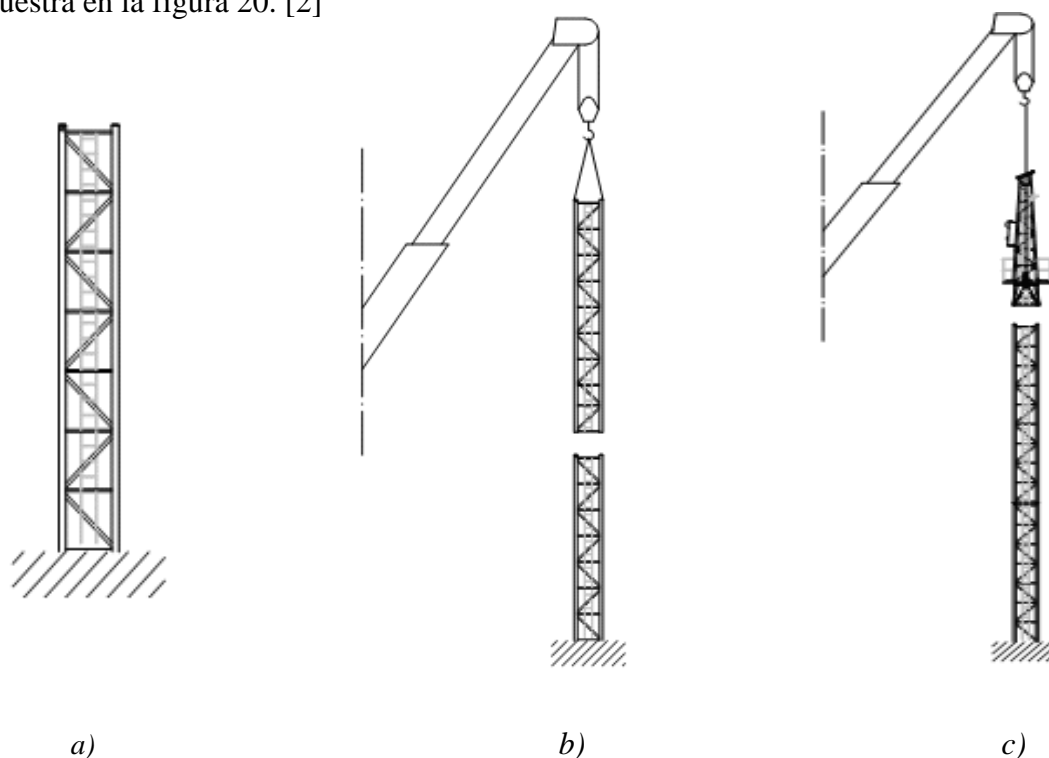


Figura 20. a) Montaje de la torre inferior, b) Montaje de los tramos de torre requeridos, c) Montaje del conjunto superior.

2.3.3.3 Montaje de la contraflecha.

Con la estructura de la contraflecha en el suelo se monta la barandilla y, posteriormente, se eleva todo el conjunto con la ayuda de la grúa auxiliar. Por último, se embulona la contraflecha a la punta de torre en su lado correspondiente.

En caso de que la grúa torre monte tirantes desde la punta de la torre hasta el final de la contraflecha (no es el caso del modelo que se analiza en este proyecto), tras el proceso anteriormente descrito, hay que elevarla un poco más (ver figura 21), inclinándola de tal forma que se puedan embulonar los dos tirantes (que forman un ángulo de 20° a 30° con la horizontal). Finalmente se deja descender el conjunto con objeto de que los tirantes queden traccionados. [2]

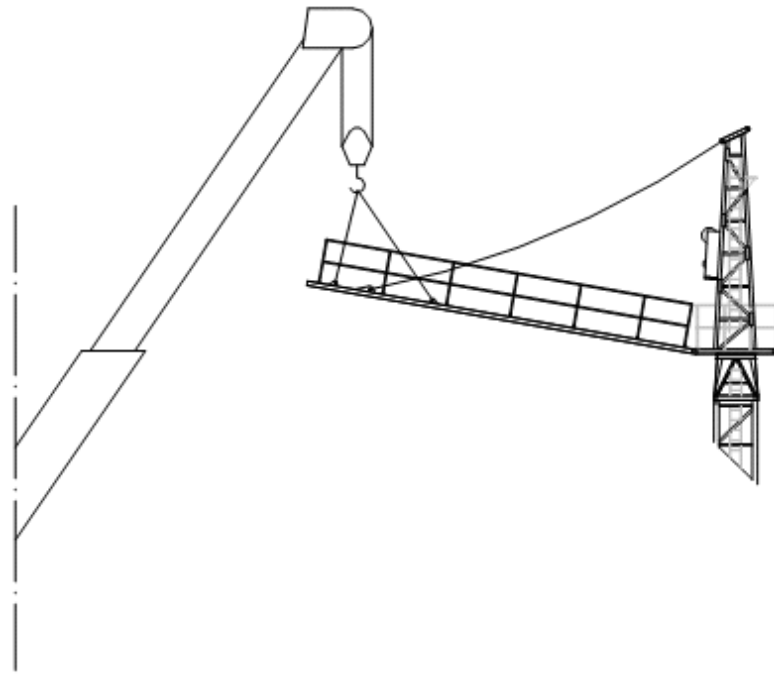


Figura 21. Elevación de la contraflecha para el montaje de los tirantes.

2.3.3.4 Montaje del primer contrapeso.

Para mantener la grúa equilibrada al colocar la pluma, se coloca con la grúa móvil (también denominada autogrúa) el primer contrapeso en el hueco más alejado de la torre, por ser este el punto que generará un momento compensatorio mayor respecto al generado por la pluma. El proceso se muestra en la figura 22. [2]

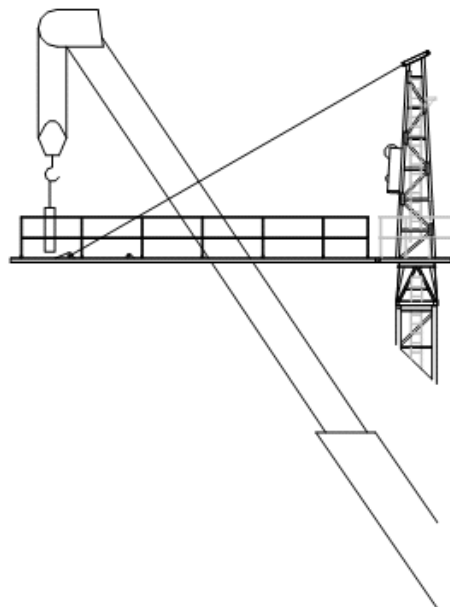


Figura 22. Montaje del primer contrapeso.

2.3.3.5 Montaje de la flecha.

En primer lugar, se debe proceder al montaje de la pluma en el suelo. En este proceso la primera tarea consiste en la introducción del carro de la pluma en el primer tramo de la misma.

Posteriormente se embulonan en el suelo los tramos de pluma, situando el conjunto de pluma lo más cerca posible a la torre y colocando los apoyos sobre unos tablones (ver figura 23). El extremo que se embulona a la torre se puede depositar sobre un tablón transversal, sin embargo es conveniente colocar las dos esquinas de la punta de pluma sobre unos tablones longitudinales a fin de que dichos extremos puedan deslizar sobre ellos.

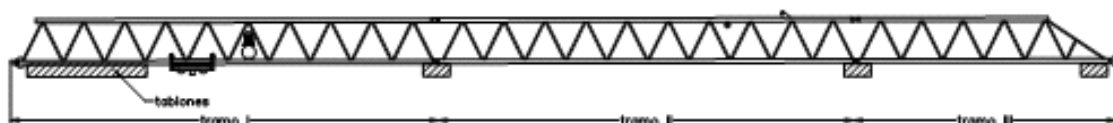


Figura 23. Montaje la pluma en el suelo.

Por último, finalizando el trabajo en el suelo, se embulona el tirante sostén pluma (en caso de que la grúa lo monte) y se instalan el cable de seguridad de montadores y el cable de traslación de carro.

Tras el montaje en el suelo de la pluma, el paso siguiente es la unión de la misma al conjunto que constituye la grúa torre. Para ello, se coloca el carro en el extremo más próximo a la torre y se ata. Se eleva la pluma hasta que se encuentra en posición horizontal y se embulona (figura 24).

Una vez colocada la pluma en su posición, se instalan todos los mecanismos que se sitúan en ella y se ajustan todos los bulones y uniones de la misma. [2]

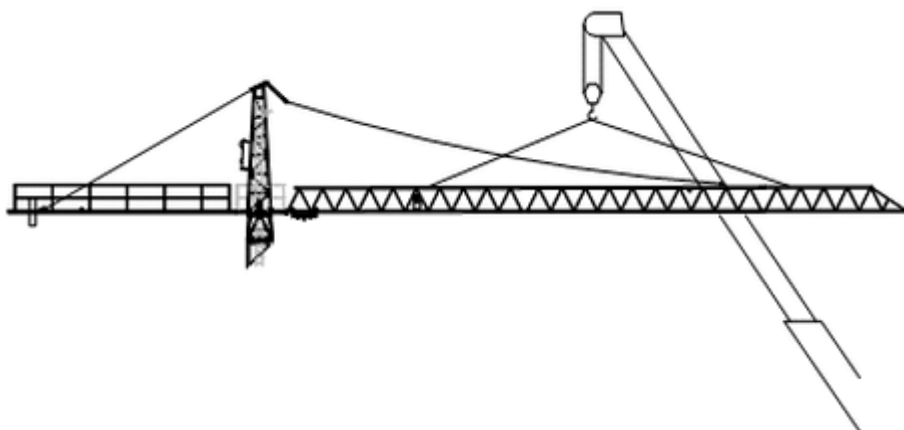


Figura 24. Elevación de la pluma.

2.3.3.6 Montaje del contrapeso restante.

Esta es la tarea final y consiste en colocar el resto del contrapeso (figura 25) y el cable de elevación. También se debe regular los limitadores y hacer las pruebas de puesta en marcha.

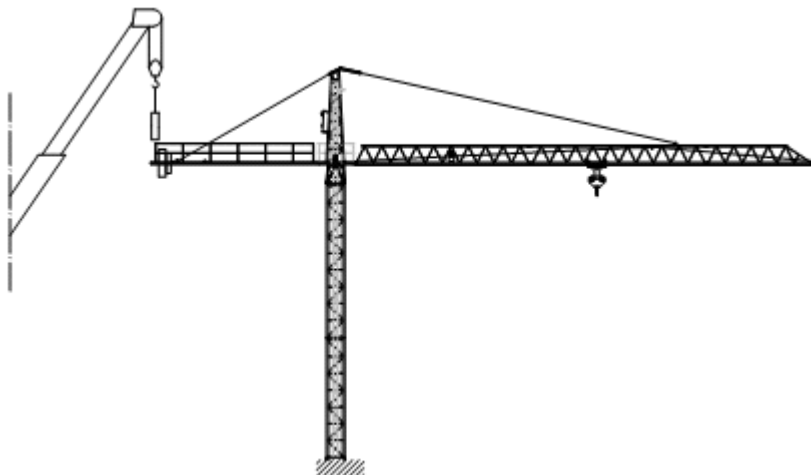


Figura 25. Montaje del contrapeso restante.

Debe considerarse siempre que las operaciones de montaje y desmontaje de la grúa no son admisibles a partir de una velocidad de viento de 50 Km/h. En caso de vientos superiores deberá detenerse inmediatamente el trabajo. [2]

2.4 Emplazamiento de grúa y distancias de seguridad.

A la hora del montaje de la grúa siempre debe de prevalecer el criterio de seguridad sobre el de rentabilidad. Cuando esté previsto en el proyecto la ejecución de un vaciado en caja del terreno, para la ubicación de la cimentación de la grúa, se seguirá el Código Técnico de Edificación: Documento Básico de Cimientos (CTE DB-SE C)

En ningún momento cualquier parte de la grúa, así como las cargas suspendidas, pueden entrar en contacto con líneas eléctricas de alta tensión, debiendo existir entre estas líneas y dichos elementos un espacio de seguridad de, al menos, 5 metros.

Al ubicar una grúa torre, siempre se tratará de evitar que pueda interferir en el radio de barrido de otra; si no fuera posible, se colocarán de forma que nunca exista interferencia entre la flecha de la más baja y el mástil de la otra. La distancia vertical entre el elemento más bajo, gancho arriba, de la grúa más elevada y el elemento más alto susceptible de chocar de la otra grúa, será como mínimo de 3 metros.

El espacio libre para el paso del personal entre las partes más salientes de la grúa y cualquier obstáculo será de 0,60 metros de ancho por 2,50 metros de alto. En caso de imposibilidad de aplicación de esta condición, se prohibirá el acceso de personal a esta zona peligrosa.

El espacio libre vertical entre la pluma y la última área de circulación de persona deberá ser de 3 metros, como mínimo, siendo recomendable 4,5 m.

La flecha de la grúa ha de poder girar completamente sin tropezar con ningún elemento de la propia construcción o edificios próximos, ya que ésta, cuando la grúa esté fuera de servicio, se dejará siempre en veleta, es decir, se orientará la flecha en la dirección del viento y sin freno, situando el gancho arriba de todo, sin carga, y lo más próximo a la torre. [2]

Todo ello puede observarse en la figura 26.

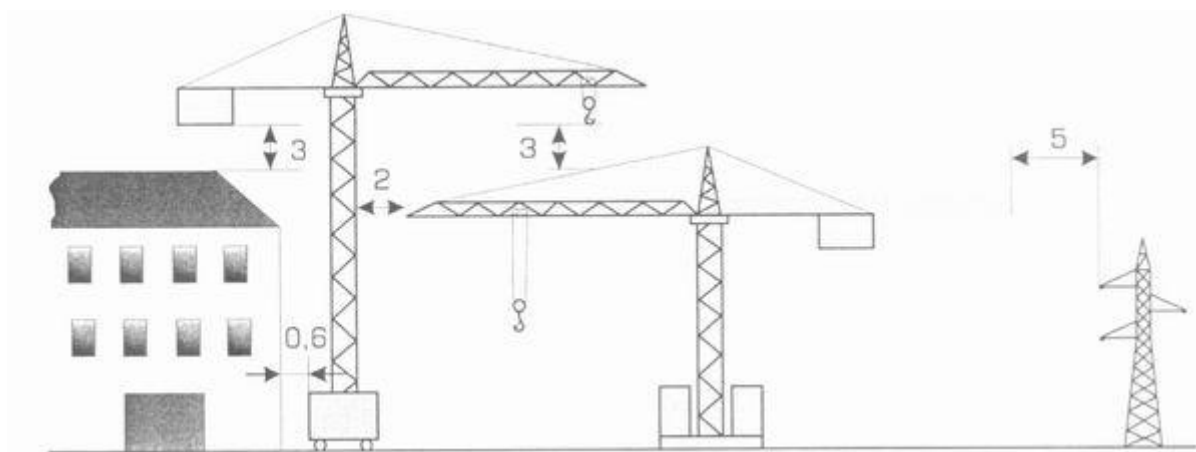


Figura 26. Distancias y disposiciones de seguridad.

2.5 Seguridad.

2.5.1 Introducción.

Como es obvio, las especiales características de las obras de construcción hacen muy difícil que su siniestralidad alcance niveles que no sean superiores a los del resto de sectores, pero precisamente para contrarrestar esta dinámica propia de la actividad constructiva, la legislación prescribe actuaciones preventivas específicas, recogidas en el Real Decreto 1627/1997: Al tratarse de un Real Decreto, es una norma legal de obligado cumplimiento, por lo que es fundamental que todos los trabajadores y empresarios del sector de la construcción la conozcan y la apliquen en su centro de trabajo con el fin de conseguir unas condiciones mínimas de seguridad y salud.

Este R.D. se desarrolla por imperativo de la Ley de Prevención de Riesgos Laborales (L.P.R.L) 31/1995, siendo normativa de mínimos, es decir, establece lo mínimo que se debe cumplir. Además la ley 31/1995, de 8 de noviembre de 1995, de Prevención de Riesgos Laborales tiene por objeto la determinación de las garantías y responsabilidades para establecer un adecuado nivel de protección de la salud de los trabajadores frente a los riesgos derivados de las condiciones de trabajo.

El R.D. y la L.P.R.L. junto con otras normas como UNE 58-101-92, el R.D. 836/2003 y Notas Técnicas de Prevención como la NTP 125 servirán en este capítulo para estudiar los riesgos, medidas preventivas, normas de seguridad que se deben de cumplir al trabajar con una grúa torre, así como dispositivos de seguridad, obligaciones o prohibiciones del gruista. [2]

2.5.2 Riesgos y medidas preventivas en la grúa torre.

A continuación se analizarán en forma detallada las diferentes funciones que se realizan con la grúa así como sus riesgos y medidas preventivas.

2.5.2.1 Riesgos directos.

En la tabla 1 se muestran los riesgos directos existentes y las medidas preventivas en trabajos de montaje, desmontaje y mantenimiento de la grúa torre.

Circunstancias peligrosas	Medidas preventivas
Caída de personas en el desplazamiento por la torre y trabajos en la misma.	En la torre existirá una escala fija, en toda su longitud con aros salvavidas; de no ser así se utilizará cinturón de seguridad con dispositivo paracaídas deslizante por un cable tendido en toda la altura de la torre. Para los trabajos de montaje y desmontaje, los montadores irán provistos de cinturón de seguridad que sujetarán a la estructura. Se utilizará calzado antideslizante.
Caída de personas en el desplazamiento por la pluma, la contrapluma y trabajos en las mismas.	Cuando un operario tenga que subir a la pluma o la contrapluma utilizará cinturón de seguridad. La cuerda salvavidas del mismo se deslizará sobre un cable tendido longitudinalmente a la misma.
Caída de personas desde pasarelas y plataformas de servicio.	En las plataformas de servicio, andamios, pasarelas, etc., existirán barandillas y plintos. El piso será antideslizante.
Desplome de la grúa por rotura del cable de tracción o fallo en los husillos.	Mantener en perfectas condiciones de utilización los elementos auxiliares de elevación, cables, husillos, etc., de acuerdo con lo establecido en la O.G.S.H.T.
Atrapamientos en los puntos de contacto de los cables-poleas o en los engranajes.	Los trabajos de conservación y mantenimiento se efectuarán siempre con la grúa parada. En las poleas, tambores y engranajes, existirán las protecciones adecuadas: cubrepoleas, carcasas, etc. La ropa de trabajo estará ajustada al cuerpo y a las extremidades, los operarios no llevarán anillos, medallas, etc.

Tabla 1. Riesgos directos existentes y medidas preventivas en trabajos de montaje, desmontaje y mantenimiento de la grúa torre.

En la tabla 2 se muestran los riesgos directos existentes y las correspondientes medidas preventivas durante la utilización de la grúa torre.

Circunstancias peligrosas	Medidas preventivas
Contacto eléctrico indirecto, debido a derivaciones del sistema eléctrico a los elementos mecánicos de la grúa.	En las grúas existirá una puesta a tierra asociada a un interruptor diferencial de sensibilidad mínima 300 miliamperios. La resistencia de la puesta a tierra no debe sobrepasar los 80 ohmios. Para conseguir en una grúa móvil una buena toma de tierra es recomendable enterrar un cable de cobre en toda la longitud de la vía, provisto de una piqueta en cada extremo y empalmar cada tramo de ésta a dicho cable con otros del mismo diámetro. Empalmar los dos railes entre sí.
Contacto eléctrico directo, debido al contacto de la carga o de los cables de la grúa con líneas eléctricas aéreas.	Ver NTP-72 (Trabajos con elementos de altura en presencia de líneas eléctricas aéreas).
Atrapamientos de personas entre la grúa móvil y elementos fijos, edificios, maquinaria, etc.	La distancia mínima entre las partes más salientes de la grúa y los obstáculos más próximos será de 70 cm.
Desplome de la grúa torre debido a: Colocación defectuosa de la vía.	El tendido de la vía será rectilíneo y perfectamente horizontal, tanto longitudinal como transversalmente. La separación entre railes será constante.
Deficiencia en el lastre de la base o de la contrapluma.	Deberán seguirse las instrucciones dadas por el fabricante. El lastre de la base puede estar formado por grava en cajones o por bloques de hormigón. Los bloques de hormigón deberán repartirse simétricamente en uno y otro lado del eje de la grúa, estarán tarados y marcados con la indicación de su peso.
Salirse de las vías.	La grúa se deslizará sobre carriles y éstos tendrán en sus extremos unos topes cuya altura no será inferior a los 3/5 del diámetro de la rueda de la grúa; asimismo se utilizarán dispositivos limitadores del recorrido de la grúa situados a un metro de los topes para aumentar la seguridad.
Fallos del terreno en grúas instaladas cerca de zanjas, excavaciones, etc.	Se deberá estudiar perfectamente el paso de la vía junto a zanjas, excavaciones, terraplenes, etc., para evitar el desplome del terreno y la caída de la máquina, tomándose las medidas adecuadas, entibación, relleno, etc., en cada circunstancia.
Caída de la carga.	El cable deberá tener la suficiente longitud. Vigilar que haya pestillo de seguridad. Colocar limitadores de carga. Cuidar la distancia a grúas cercanas, edificios, chimeneas, etc. Un programa de conservación y mantenimiento evitará la rotura del cable. Los cables no se usarán para cargas superiores a las que están calculados. Todo cable que presente una deformación o estrangulación debe ser sustituido, así como los que presenten un cordón o varios hilos rotos.

Tabla 2. Riesgos directos existentes y medidas preventivas durante la utilización de la grúa torre.

2.5.2.2 Riesgos indirectos.

En la tabla 3 se muestran los riesgos indirectos existentes y las correspondientes medidas preventivas durante la utilización de la grúa torre.

Circunstancias peligrosas	Medidas preventivas
Desplome de la grúa.	No debe utilizarse la grúa con velocidad del viento igual o superior a 60 Km/h. o al límite fijado por el constructor. Cuando la velocidad del viento supere este límite hay que llevar la grúa móvil sobre el tramo de seguridad del rail y anclarla con las tenazas. La pluma debe orientarse en el sentido de los vientos dominantes y ser puesta en veleta (giro libre), desfrenando el motor de orientación. No deben arrancarse con la grúa objetos adheridos al suelo. No deben elevarse cargas con tiros inclinados.
Caída de la carga o parte de ella.	Las cargas de forma alargada se sujetarán con eslingas dobles para evitar que puedan caer por deslizamiento. Cuando sea preciso se guiarán con cuerdas, estando la persona que guía la carga fuera del alcance de caída de la misma. Las plataformas de transporte de materiales estarán apantalladas; de no ser posible el apantallamiento, las cargas se atarán a las plataformas.
Caída de personas al recoger la carga junto a aberturas exteriores (se hace mención de este riesgo, no siendo imputable a la grúa ni a las maniobras con esta máquina realizadas, por considerarlo muy grave y origen de accidentes).	Se instalarán en las plantas de los edificios plataformas en voladizo, dotadas de barandillas y rodapié para la descarga de los materiales.
Caída del gruista.	En caso necesario, el gruista se colocará sobre una plataforma volada del borde del forjado, dotada de barandillas y rodapiés.

Tabla 3. Riesgos indirectos existentes y medidas preventivas durante la utilización de la grúa torre.

2.5.3 Dispositivos de seguridad: limitadores.

Aparte de los sistemas mecánicos de seguridad, existen en la grúa limitadores electromecánicos, los cuales estarán siempre reglados y constantemente vigilados. [2]

Son los siguientes (ver figura 27):

- Limitador de par máximo o de momento: corta el avance del carro y la subida del gancho cuando se eleva una carga superior a la prevista para cada alcance. Permite bajar el gancho y retroceder el carro.
- Limitador de carga máxima: corta la subida del gancho cuando se intenta levantar una carga que sobrepasa la máxima en un 10%. Permite bajar el gancho.

- Limitadores en recorrido en altura del gancho: son dos fines de carrera superior e inferior, de los movimientos de elevación y descenso, que actúan sobre el mecanismo tanto en la subida como en la bajada, pudiendo efectuar el movimiento contrario.
- Limitador de traslación del carro: corta el avance del carro de distribución, antes de llegar a los topes de goma, en los extremos de la flecha.
- Limitador del número de giros de la torre: actúa sobre el mecanismo de orientación y limita el número de vueltas, dos o tres, de la parte giratoria en uno y otro sentido, con el fin de no dañar la manguera eléctrica. Puede sustituirse este dispositivo colocando un colector de anillos.

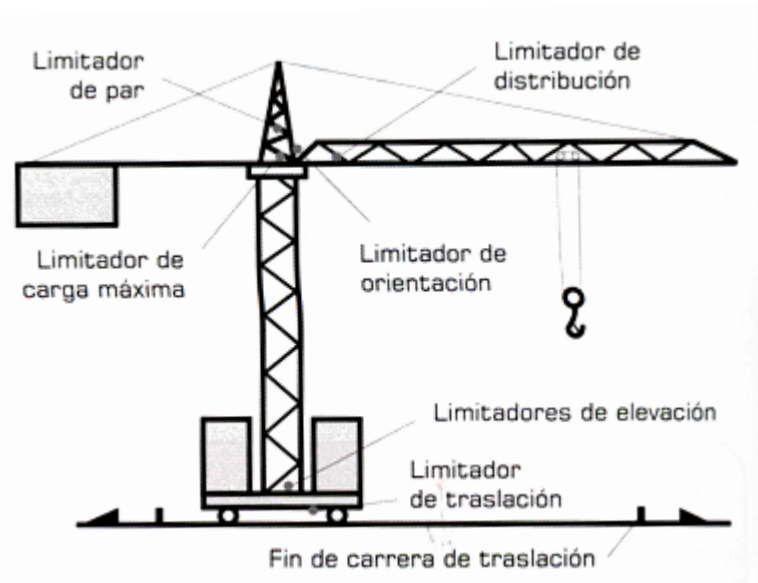


Figura 27. Dispositivos de seguridad: limitadores.

Además las grúas deben disponer de topes de las vías y sistemas de sujeción del aparato a las vías mediante mordazas, además de poseer escaleras dotadas de aros salvavidas, plataformas y pasarelas con barandillas, cable tendido longitudinalmente a lo largo de la pluma y la contrapluma y en su caso cable tendido longitudinalmente a lo largo de la torre. [2]

2.5.4 Seguridad en el empleo de elementos bajo tensión eléctrica.

En este caso, la grúa está provista de dispositivos que impidan a toda persona no autorizada acceder a las piezas bajo tensión y a los órganos cuyo reglaje afecte a la seguridad; en particular, los armarios de contactores que deberán estar bajo llave y las cajas que contienen las resistencias protegidas, de manera que impidan la introducción de las manos. [2]

En caso de tener mando a distancia, todos los circuitos de mando y control son de muy baja tensión.

2.5.5 Indicadores de carga y alcances

Existe, fijada sobre la grúa, una placa en lugar visible que especifica alcance, carga máxima y distancia (ver figura 28).

Esto es necesario, ya que esta placa indicadora vendrá dada en función de la curva de la figura 28, donde por ejemplo si se lleva una carga de 4.000 kg desde el mástil hacia la punta, en el momento en que pase el carro los 9 metros actuará el limitador de par máximo. [2]

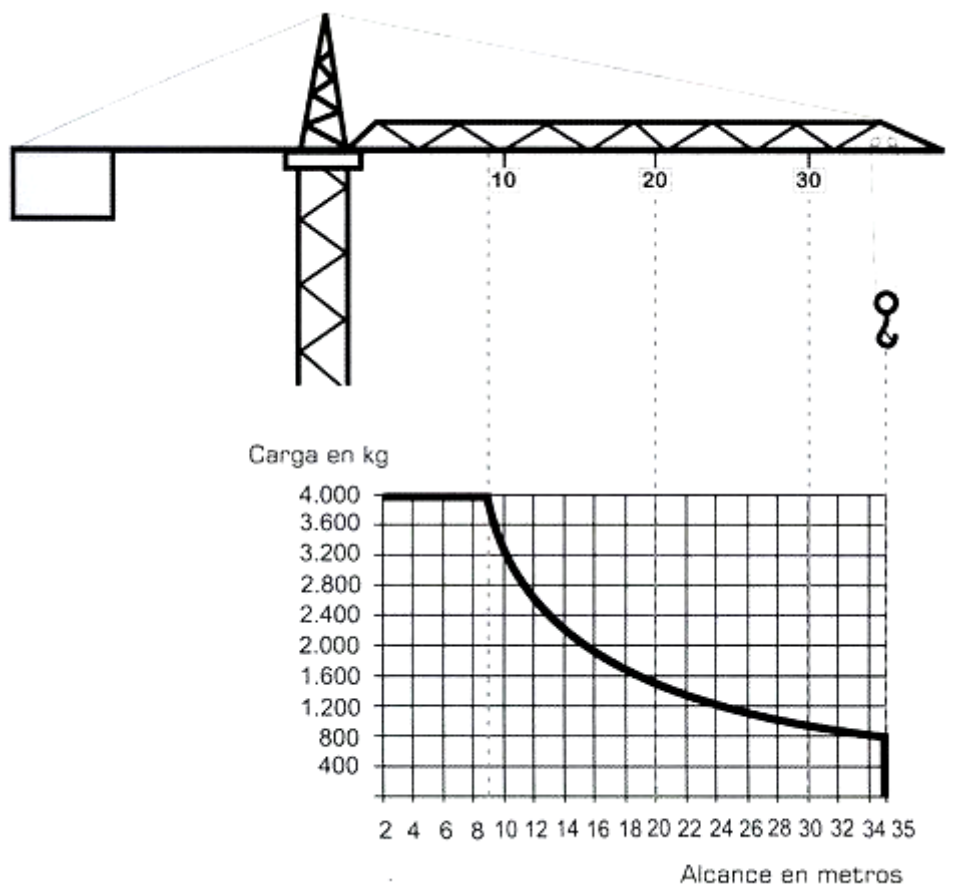


Figura 28. Diagrama de cargas y alcances.

2.5.6 Prohibiciones en el uso de una grúa torre

Para finalizar este epígrafe de seguridad, es conveniente conocer las prohibiciones más relevantes que el guista deberá tener en cuenta al desempeñar su trabajo.

La norma UNE 58-101 indica, entre otras, las siguientes prohibiciones:

- Utilizar los elementos de elevación para hacer tracciones oblicuas de cualquier tipo (figura 29).
- Arrastrar o arrancar objetos fijos del suelo o paredes, así como cualquier otra operación extraña a las propias de manutención (figura 30).
- Elevar una carga superior a las indicadas en las especificaciones de la grúa.
- Transportar cargas por encima del personal (figura 31).
- Transportar cargas por zonas transitadas por viandantes o vehículos si no se ha cortado el paso y señalizado anteriormente.
- Balancear las cargas para depositarlas en puntos donde no llega normalmente el aparejo de elevación (figura 32).
- Utilizar las grúas para el transporte del personal.
- Trabajar con una velocidad del viento superior a 72 km/h., o cuando las cargas por su forma y tamaño fuesen difíciles de controlar aunque la velocidad del viento sea menor (figura 33).
- Trabajar con tormenta eléctrica cerca; se interrumpirá el trabajo (desconectar corriente de acometida).
- Apoyar el gancho en el suelo o cualquier otro lugar, de modo que el cable pueda quedar flojo con peligro de que se salga de poleas y tambores.

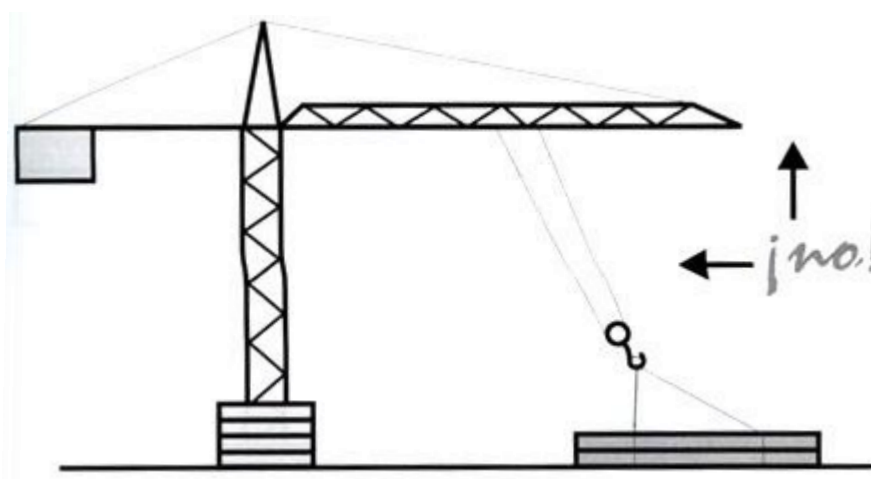


Figura 29. Está prohibido realizar tiros oblicuos.

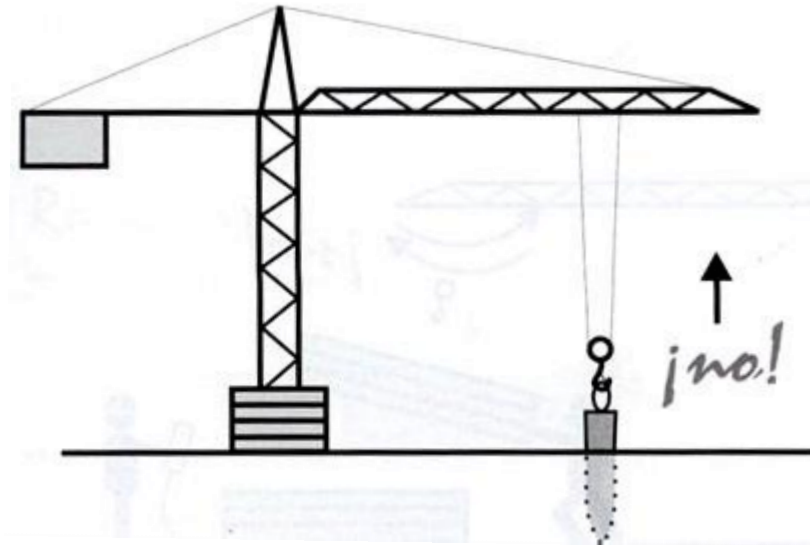


Figura 30. Está prohibido arrancar objetos de paredes o suelos.

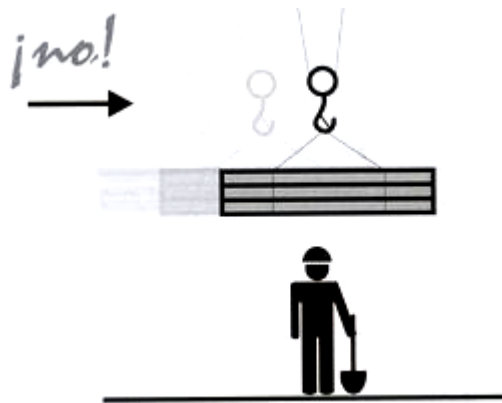


Figura 31. Está prohibido el transporte de cargas por encima del personal.

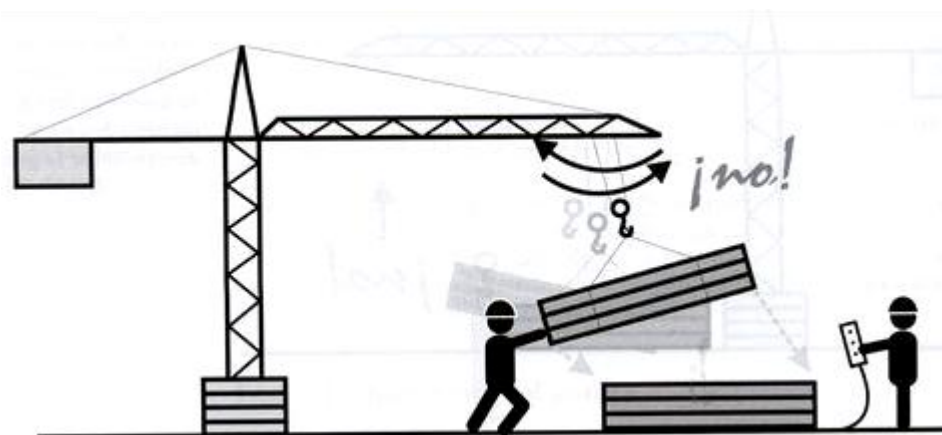


Figura 32. Está prohibido balancear cargas.

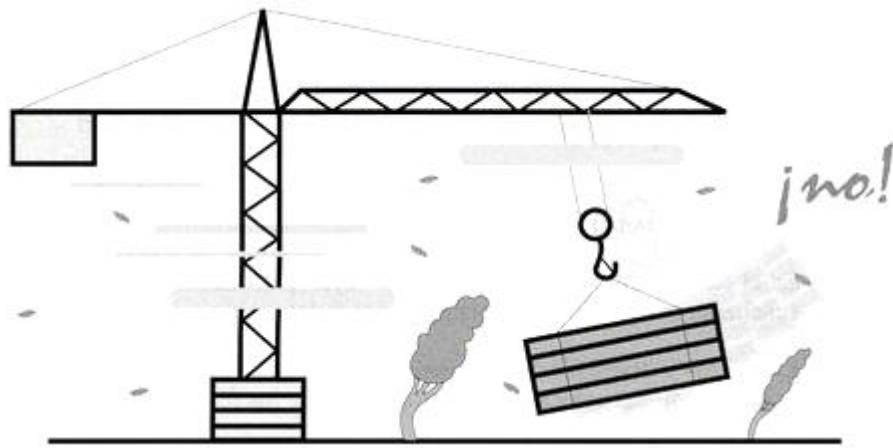


Figura 33. Prohibido trabajar con la grúa si el viento impide su correcto dominio

Capítulo 3

La grúa torre: principios básicos generales de cálculo.

3.1 Consideraciones generales y datos de partida.

La grúa es una máquina destinada a la elevación y desplazamiento de cargas dentro de los límites de su capacidad nominal. Sus características constructivas serán proporcionadas por las solicitaciones de dichas cargas.

Las principales solicitaciones que determinan las características de la grúa torre a instalar son la altura útil, el alcance y la carga a elevar.

La grúa se compone de cabeza con brazos, torre desmontable y base. De estas tres partes, la primera, cabeza con brazos, esta dimensionada de acuerdo a la influencia de las características de cargas y alcances. La segunda, torre portante, esta dimensionada principalmente por la influencia de la característica de altura. La tercera está afectada por la influencia de las tres y tiene como misión principal la estabilidad del conjunto y la posibilidad de su traslación.

Las grúas pueden dividirse en tres tipos diferentes: libres, capacitadas para realizar todos los movimientos; transportables, que pueden cambiar de posición en determinadas circunstancias y fijas, que no pueden moverse.

Las grúas libres están calculadas para que puedan efectuar todos sus movimientos por lo que estarían compuestas de las tres partes fundamentales y sus características serán las de una grúa normal.

Las grúas transportables no pueden trasladarse cuando están haciendo otros movimientos por lo que ordinariamente se comportan como grúas fijas, cuando se trasladan lo hacen en condiciones especiales, poco viento sin carga, pluma posicionada.

Las grúas fijas no necesitan base, sino simplemente unos anclajes; pueden ganar en altura más que las anteriores para lo cual necesitan ser arriostradas cada cierta altura.

En los tres tipos descritos, todas las grúas con iguales características de cargas y alcances tienen la parte giratoria, cabeza y brazos exactos; la torre portante, teóricamente podía ser más ligera a medida que nos acercamos a la parte giratoria, pero se hace igual por razones de intercambiabilidad y facilidad de fabricación. Interesa tener en cuenta estas características para ganar altura, caso de necesitarlo, con torres más robustas del mismo modulo y posibilidad de encaje.

3.1.1 Normativa.

El cálculo de las solicitaciones se realiza en base a lo especificado en las normas siguientes:

- UNE 113-85 "Grúas. Acción del viento"
- UNE 58-117-83 "Aparatos pesados de elevación. Solicitaciones a considerar en el cálculo de las estructuras"
- UNE 58-132-91 "Aparatos de elevación. Reglas de cálculo. Parte 2: Solicitaciones y casos de solicitaciones a considerar en el cálculo de las estructuras y los mecanismos"

El diseño y cálculo de las estructuras así como de la totalidad de las uniones se ajusta a lo establecido en la norma vigente CTE-DB-SE-A y su construcción se lleva a cabo según lo especificado en dicha norma.

3.1.2 Clasificación.

La clasificación de grúas y aparatos de elevación es el sistema que permite establecer el diseño de las estructuras y de los mecanismos sobre bases racionales, sirviendo de cuadro de referencia a los fabricantes y compradores en cuanto que permite adecuar un aparato dado a las condiciones de servicio para las cuales es requerido.

La norma UNE 58-112-91/1 establece una clasificación general de los aparatos de elevación en base al número de ciclos de maniobra efectuados durante la vida prevista del aparato y de un coeficiente del espectro de cargas que representa un estado de carga nominal.

Los parámetros que se han de tener en cuenta para determinar el grupo al que pertenece un aparato son:

1. La clase de utilización: en función del número máximo de ciclos de maniobra que estipulemos):

- Utilización ocasional ($1,6 \times 10^4 - 1,25 \times 10^5$ ciclos)
- Utilización regular en servicio ligero ($2,5 \times 10^5$ ciclos)
- Utilización regular en servicio intermitente (5×10^5 ciclos)
- Utilización regular en servicio intensivo (10^6 ciclos)
- Utilización intensiva ($2 \times 10^6 - 4 \times 10^6$ ciclos)

Para determinar una duración de vida apropiada, es preciso considerar los elementos económicos, técnicos y de ambiente, teniendo en cuenta la influencia del envejecimiento técnico.

El número total de ciclos de maniobra probable está ligado al factor de utilización del aparato, por razones de comodidad, el espectro de los números de ciclos de maniobra ha sido dividido en diez clases de utilización.

Desde el punto de vista de la clasificación, se considera que un ciclo de maniobra comienza en el momento en que la carga está dispuesta para ser izada y acaba cuando el aparato está dispuesto para izar la siguiente carga.

El número total de ciclos de maniobra es la suma de todos los ciclos de maniobra efectuados durante la vida especificada del aparato de elevación.

2. El estado de cargas: en función del número de ciclos para cada nivel de carga:

- Ligero: aparato que levanta raramente la carga máxima de servicio y corrientemente cargas muy pequeñas.
- Moderado: aparato que levanta con bastante frecuencia la carga máxima de servicio y corrientemente cargas pequeñas.
- Pesado: aparato que levanta con bastante frecuencia la carga máxima de servicio y corrientemente cargas medianas.
- Muy pesado: Aparato que corrientemente maneja cargas próximas a la carga máxima de servicio.

3.2 Tipos de solicitaciones.

Para determinar las cargas que afectan a la grúa hay que guiarse por lo establecido en la norma UNE 58-132-91 "Aparatos de Elevación. Reglas de cálculo. Parte 2: Solicitaciones y casos de solicitaciones a considerar en el cálculo de las estructuras y los mecanismos", que establece la siguiente clasificación

- Solicitaciones principales, debidas al peso propio y cargas de servicio.
- Solicitaciones debidas a los movimientos verticales
- Solicitaciones debidas a los movimientos horizontales de traslación y a efectos de choque.
- Solicitaciones debidas a los efectos climáticos, pudiendo dividir estas solicitaciones según la grúa esté en servicio o no lo esté.

3.2.1 Solicitaciones principales.

1-. Peso propio: Es la carga debida a los materiales utilizados en la construcción de la grúa. Siguiendo la notación de la norma UNE 58-117-83, estas cargas pueden clasificarse en:

- S_{g1} : Carga de peso propio de la pluma (tn/m)
- S_{g2} : Carga de peso propio de la torre (mástil)(tn/m)
- S_{g3} : Carga del contrapeso (tn)

2-. Carga de servicio (S_L): Será el propio peso de la carga y se supondrá en su posición más desfavorable.

En la figura 34 se observa la distribución de estas cargas.

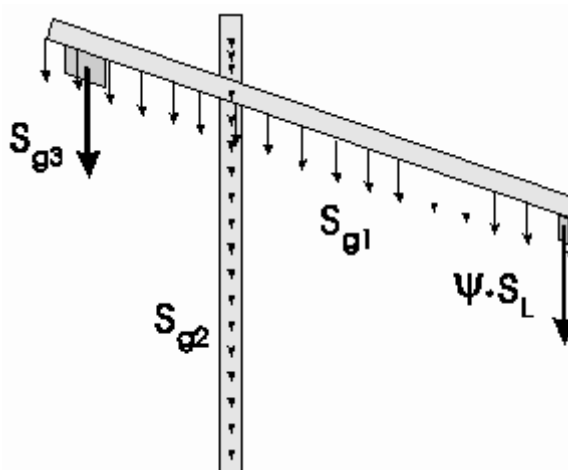


Figura 34. Solicitaciones principales en una grúa torre

3.2.2 Solicitaciones debidas a los movimientos verticales.

Estas solicitaciones se originan por el levantamiento más o menos brusco y las aceleraciones del movimiento de elevación, así como las acciones verticales debidas a la rodadura. Las mismas se cubren multiplicando la carga de servicio por un factor denominado "coeficiente dinámico" (φ) que se calcula con la siguiente expresión:

$$\varphi = 1 + \varepsilon V_L$$

siendo

- V_L la velocidad de elevación en m/s, tomando como valor máximo de velocidad de elevación 1 m/s.
- ε el coeficiente experimental, resultado de multitud de mediciones realizadas en diferentes tipos de aparatos.

De esta forma resulta que:

$$S_L = \varphi S'_L$$

Como φ considera la elevación más o menos brusca de la carga que constituye el choque más importante, pueden ser despreciadas las aceleraciones consecuencia de la elevación y de las acciones verticales debidas a la rodadura según la UNE 58-117-83.

3.2.3 Solicitaciones debidas a los movimientos horizontales de traslación y a efectos de choque.

1-. Cargas debidas al movimiento de traslación: Estas cargas están originadas por el movimiento de traslación que puede tener toda la grúa en conjunto desde su base. Este tipo de carga se supone que es una fuerza horizontal aplicada en la cruceta de la grúa, que es aproximadamente el C.D.G. Este valor de la carga puede cuantificarse mediante:

$$S_H = a \cdot \frac{Q}{10}$$

donde:

- a es la aceleración en m/s^2 y su valor depende del grado de velocidad seleccionado para su uso.
- Q es la carga total sobre las ruedas motrices en toneladas.

2-.Solicitaciones debidas a los efectos de choque: Las solicitaciones debidas al choque están generadas por las fuerzas de inercia que se producen debidas al movimiento del carro sobre la pluma. Si la grúa está dotada de limitadores de velocidad

que impiden que se superen los $0,7 \text{ m/s}$, no es necesario considerar estos esfuerzos. De no ser así, para el cálculo se utilizará:

$$S_T = a \cdot \frac{S_L}{10}$$

3.2.4 Solicitaciones debidas a los efectos climáticos.

Resultan de la acción del viento, de la sobrecarga de nieve y de las variaciones de la temperatura.

La sobrecarga de nieve no se tiene en cuenta en los cálculos de los aparatos de elevación y la sollicitación producida por la variación de la temperatura no se considera más que en casos particulares, entre otros, cuando los elementos no pueden dilatarse libremente.

Se considerará la acción del viento en los casos de:

- Acción del viento cuando la grúa está en servicio
- Acción del viento cuando la grúa está fuera de servicio

Para calcular las acciones debidas al viento, debe conocerse la fuerza F que éste realiza sobre las estructuras mediante la utilización de la fórmula que la norma UNE 58-113-88 da:

$$F = A \cdot p \cdot C_f$$

donde:

- A es la superficie neta en m^2 , es decir, la proyección de la superficie sólida sobre un plano perpendicular a la dirección del viento.
- P es la presión en KN/m^2
- C_f es el coeficiente de forma en la dirección del viento del elemento considerado

Según la norma UNE 58-113-85 puede considerarse la presión del viento constante en cada intervalo de 10 m . Asimismo, la norma UNE 58-91/2, en su apartado referido a la acción del viento cuando la grúa se encuentra fuera de servicio, considera las siguientes alturas sobre el suelo de 0 a 20 m y de 20 a 100 m por lo que es razonable considerar la acción del viento por tramos a lo largo de la altura.

3.2.4.1 Sollicitación debida al viento estando la grúa en servicio.

Este tipo de sollicitación considera la velocidad del viento que la grúa soporta en servicio. Para la realización del cálculo se tomará en la dirección más desfavorable.

Para aplicar la fórmula anteriormente descrita, se obtienen los datos de la presión del viento consultando la norma UNE 58-113-85:

$$\text{De } 0 \text{ a } 20 \text{ m} \Rightarrow P = 25 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{De } 20 \text{ m a } 100 \text{ m} \Rightarrow P = 50 \text{ kg/m}^2$$

Para calcular la acción del viento en la carga móvil y en el contrapeso, se recurre, también a la norma referida en el párrafo anterior que establece que para todos los tipos normales de grúas que se instalen al aire libre se tiene:

$$f = 0.003 \cdot m \cdot g$$

donde:

- m es la masa en toneladas
- g es la aceleración de la gravedad ($9,8 \text{ m/s}^2$)

En la figura 35 se observa la distribución de las cargas debidas al viento estando la grúa en servicio

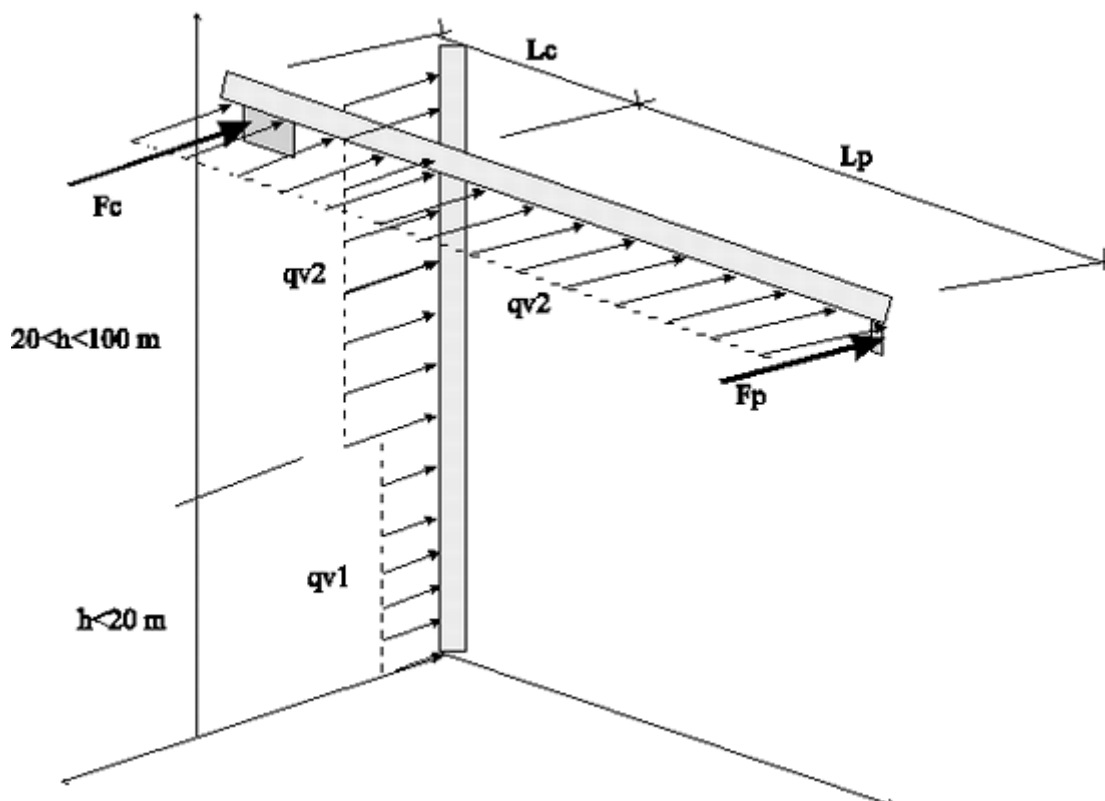


Figura 35. Cargas debidas al viento estando la grúa en servicio.

3.2.4.2 Solicitación debida al viento estando la grúa fuera de servicio.

Para el cálculo de esta solicitud se tiene en cuenta el viento máximo soplando en la dirección más desfavorable que una grúa puede resistir.

En la norma UNE 58-132-91/2 se encuentran las presiones a utilizar para los diferentes tramos de altura.

$$\text{De } 0 \text{ a } 20 \text{ m} \Rightarrow P = 80 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{De } 20 \text{ m a } 100 \text{ m} \Rightarrow P = 110 \text{ kg/m}^2$$

En este caso, la norma especifica que, con viento en tempestad, no se puede utilizar este tipo de aparatos elevadores, por lo que la dirección de cálculo del área neta de la grúa es la misma que la dirección del viento (ver figura 36).

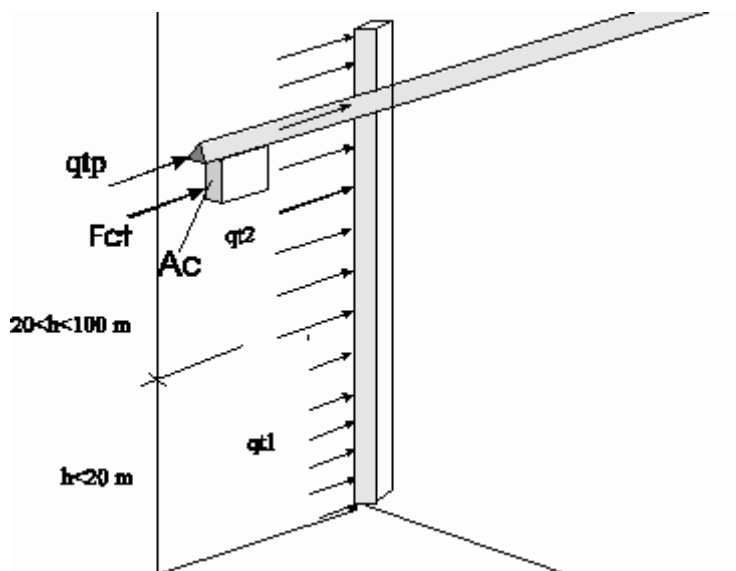


Figura 36. Cargas debidas al viento estando la grúa fuera de servicio.

3.3 Hipótesis de cálculo.

La norma UNE 58-132-91/2 señala los siguientes casos a considerar:

- **Hipótesis I:** Grúa en servicio normal sin viento.
- **Hipótesis II:** Grúa en servicio con viento.
- **Hipótesis III:** Grúa sometida a solicitudes excepcionales.

Debido a las imperfecciones de cálculo o imprevistos, según la norma debe tomarse un coeficiente de mayoración (γ_c) según el tipo de grúa.

3.3.1 Hipótesis I.

Se considerarán las solicitaciones estáticas debidas al peso propio de los elementos, las solicitaciones debidas a la carga de servicio S_L multiplicada por el coeficiente dinámico Ψ así como los efectos horizontales más desfavorables. Estas solicitaciones irán multiplicadas por el coeficiente de mayoración γ_c .

$$\gamma_c(S_g + \Psi S_L + S_H)$$

3.3.2 Hipótesis II.

En este caso se añadirá a las solicitaciones consideradas en la hipótesis I la acción del viento límite de servicio S_W y, si fuera el caso, las acciones debidas a la variación de la temperatura.

$$\gamma_c(S_g + \Psi S_L + S_H) + S_W$$

3.3.3 Hipótesis III.

Las solicitaciones contempladas en este caso son:

- Aparato fuera de servicio con viento máximo
- Aparato en servicio bajo el efecto de un choque
- Aparatos sometidos a ensayos previstos en la norma UNE 58-118.

Por otro lado, también deben ser consideradas las siguientes especificaciones:

- En las solicitaciones debidas al viento tempestad se consideran los efectos del propio peso (S_g) incrementados por los efectos del viento máximo (S_{Wmax}).
- El mayor de los efectos de choque (S_T) se añade a las solicitaciones del peso propio S_g y la carga de servicio.
- No se tiene en cuenta si la carga de servicio no provoca tensiones en sentido contrario al peso propio.

Si los efectos de choque son relativamente pequeños, se puede considerar que el segundo apartado de esta hipótesis quedaría completamente cubierta por la hipótesis I, que a su vez se ve cubierta por la hipótesis II. Por lo que para el cálculo de la estructura se tendrá en cuenta la hipótesis I $[\gamma_c(S_g + \Psi S_L + S_H) + S_W]$ y la hipótesis II $[(S_g + S_{Wmax})]$.

3.4 Diseño de los elementos estructurales de la grúa.

Para poder comprender de una forma ordenada el cálculo de cada elemento estructural de la grúa se seguirá el esquema siguiente:

1.-Diseño de los elementos del mástil:

- Hipótesis II con pluma perpendicular a la dirección del viento.
- Hipótesis II con pluma orientada en la dirección del viento.
- Hipótesis III con pluma orientada en la dirección del viento.

Como puede verse, no se calculan la hipótesis I, por no considerarse crítica, ni la hipótesis III con la pluma orientada en la dirección perpendicular al viento, ya que según la norma no se trabajará con tempestad, por lo que la grúa se deja en veleta (libre de movimiento en su articulación superior).

2.-Diseño de la pluma:

- Caso I: Carga de servicio en la punta.
- Caso II: Carga de servicio en el anclaje del tirante.
- Caso III: Carga de servicio en el centro de la longitud total de la pluma
- Caso IV: Carga en la contrapluma.
- Caso V: Cargas horizontales.

3.-Diseño de los elementos del castillete.

4.-Diseño de la zapata.

3.4.1 Diseño de los elementos del mástil.

3.4.1.1 Hipótesis II: Pluma perpendicular a la dirección del viento estando la grúa en servicio.

- Esfuerzos en la base: se calculan las reacciones (momentos y reacción) que se producen en el apoyo inferior del mástil (ver figura 37).

$$M_y = \Psi \gamma_c S_L L_p + \gamma_c S_{g1} \frac{L_p^2}{2} - \gamma_c S_{g2} \frac{L_c^2}{2} - \gamma_c S_{g3} L_c$$

$$M_x = q_{v1} \frac{20^2}{2} + q_{v2} (H + H' - 20) \left(20 + \frac{H + H' - 20}{2} \right) + \gamma_c S_H H + F_c H + F_p H + q_{v2} (L_c + L_p) H$$

$$N_T = \gamma_c(S_{g3} + S_{g1}(L_c + L_p) + S_{g2}(H + H') + \Psi S_L)$$

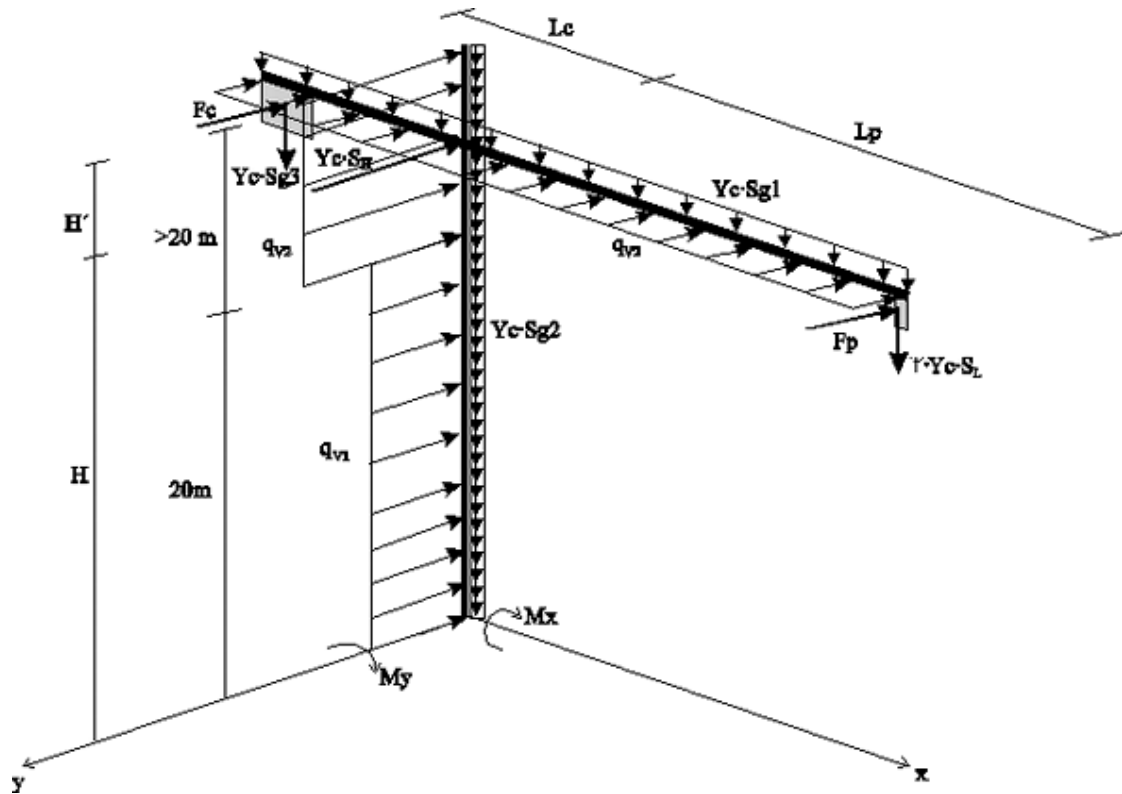


Figura 37. Diagrama de cargas para el cálculo de esfuerzos en la base

- b) Pandeo global del mástil : Conocidas las cargas de compresión a la que está sometido el mástil, calculamos su esbeltez global para obtener el coeficiente global de pandeo ω que, junto con los momentos resistentes de los perfiles, permitirá comprobar la resistencia conjunto a pandeo (ver figura 38).

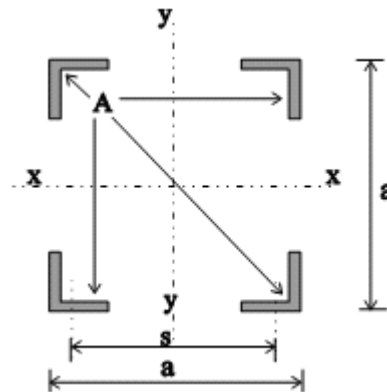


Figura 38. Pandeo global del mástil por compresión.

- c) Pandeo global del mástil por flexión y torsión: Se calculará el pandeo que se produce en los elementos de la celosía que forman el mástil y que están sometidos a compresión en la sección transversal al mástil. También debemos comprobar los esfuerzos cortantes que se producen por la torsión sobre esta sección. (ver figura 39).

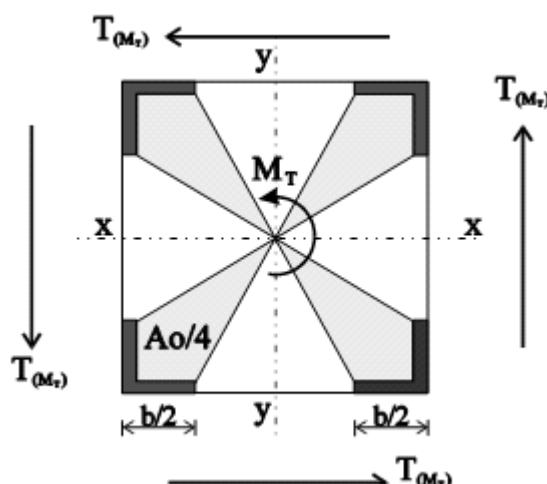


Figura 39. Pandeo global del mástil por flexión y torsión.

- d) Pandeo local de un cordón principal: Se calculará el pandeo al cual está sometido el tramo comprendido entre dos nudos consecutivos del mástil y al que le afecta la flexión por cada uno de los planos se indica en la figura 40.

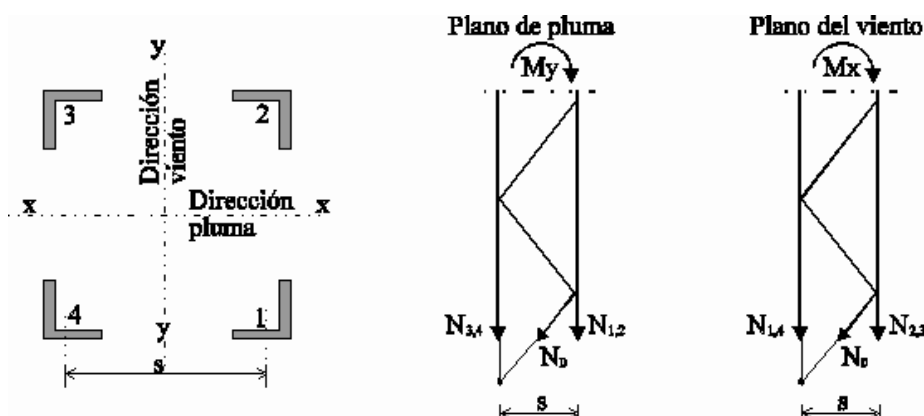


Figura 40. Pandeo local de un cordón principal.

- e) Comprobación de un elemento de enlace: Se verificarán los elementos de unión de los cuatro angulares principales que forman el mástil, es decir las diagonales que conforman la celosía del mástil.

3.4.1.2 Hipótesis II: Pluma orientada en la dirección del viento estando la grúa en servicio.

En la figura 41 se observa la distribución de cargas que se aplica durante esta hipótesis, siendo q_{vp} la presión dinámica del viento multiplicada por el área del triángulo de la sección de pluma

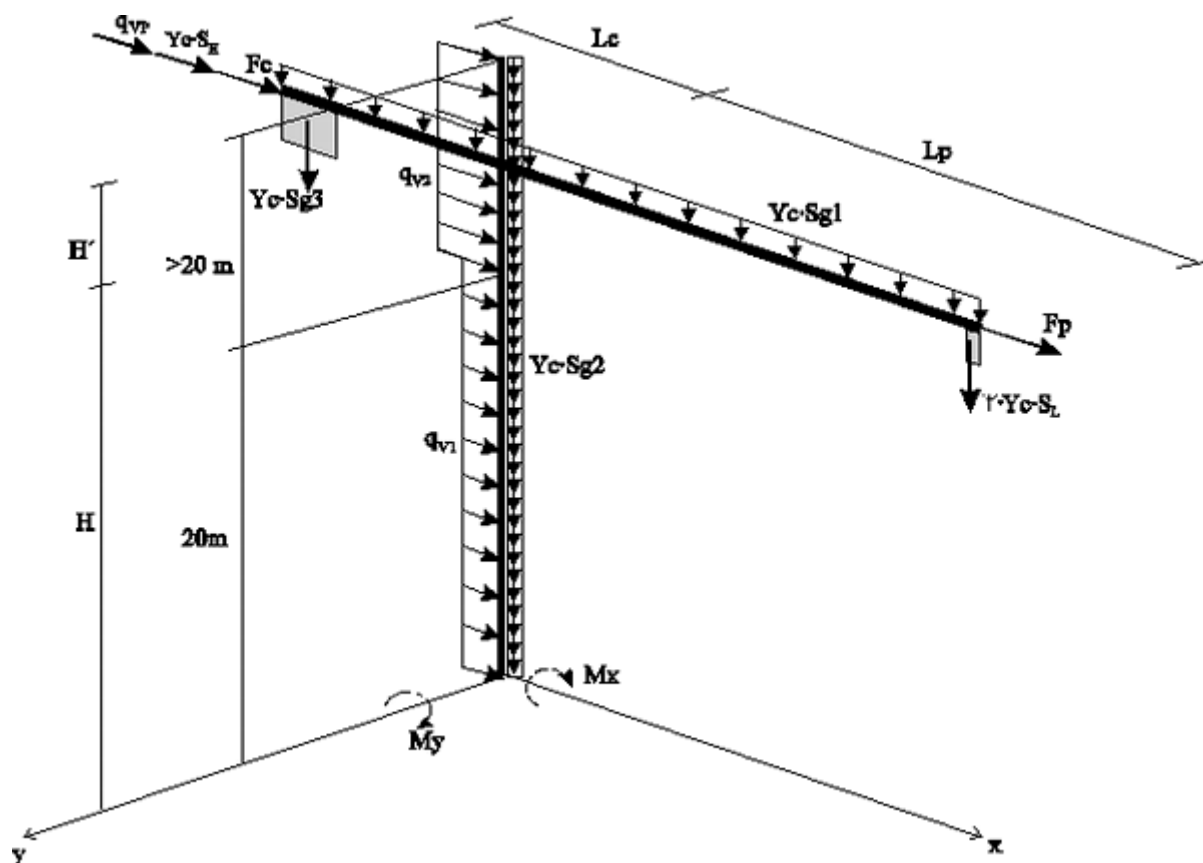


Figura 41. Diagrama de cargas para la aplicación de la hipótesis II: pluma orientada en la dirección del viento y grúa fuera de servicio

En este caso los pasos para la comprobación de la estructura son similares a los de la hipótesis anterior, salvo las acciones que se deben considerar.

3.4.1.3 Hipótesis III: Pluma orientada en la dirección del viento estando la grúa fuera de servicio

En la figura 42 se observa la distribución de cargas que se aplica durante esta hipótesis siendo q_{tp} la presión dinámica del viento en tempestad multiplicada por el área del triángulo de la sección de pluma y F_{ct} la fuerza del viento en tempestad sobre el contrapeso ($F_{ct} = 110 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{Area}_{\text{contrapeso}}$)

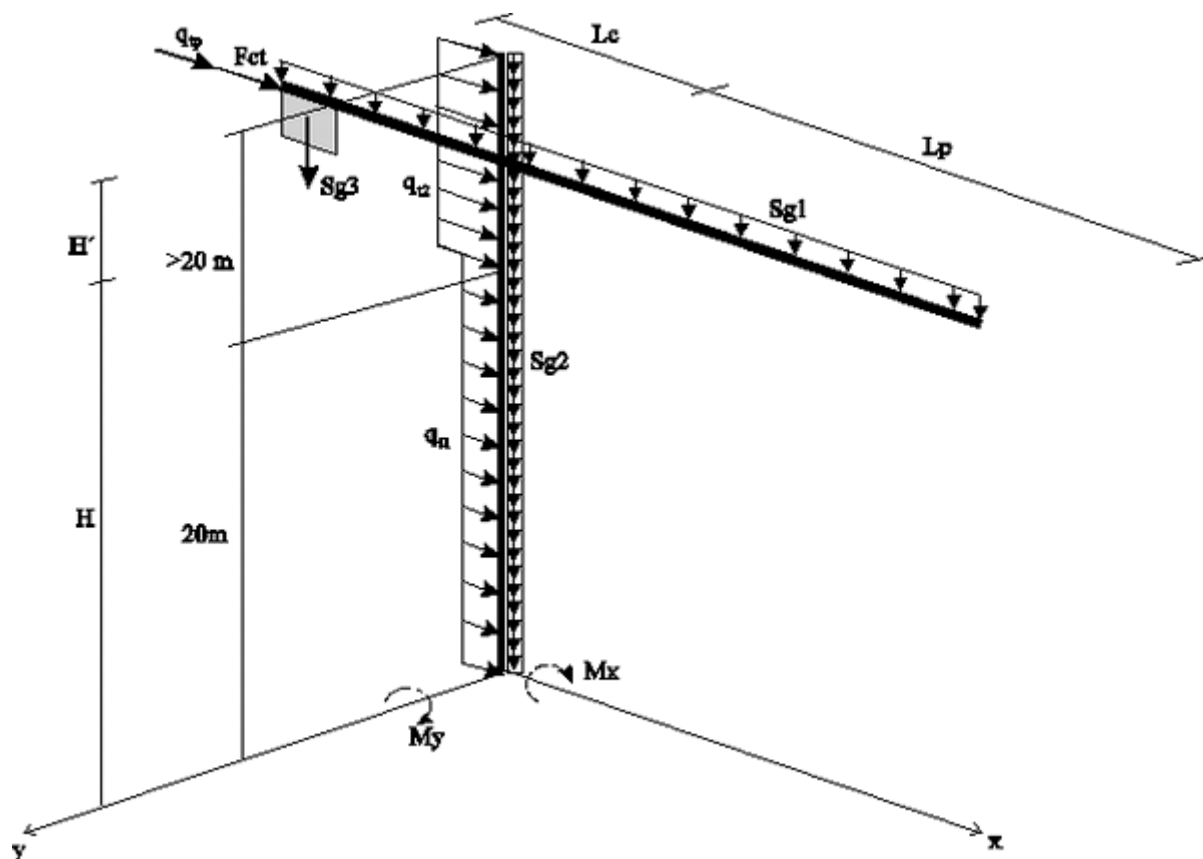


Figura 42. Diagrama de cargas para la aplicación de la hipótesis III: pluma orientada en la dirección del viento y grúa fuera de servicio

De nuevo, los pasos para la comprobación de la estructura son similares a los de las hipótesis anteriores, salvo las acciones que se deben considerar.

3.4.2 Diseño de los elementos de la pluma.

En las verificaciones para la pluma se tendrá en cuenta únicamente los casos más desfavorables. Estos serán para el plano vertical, en función la posición que ocupe S_L , y para el plano horizontal, cuando el viento se encuentra soplando perpendicularmente a la pluma y con S_L en la punta (figura 43).

Para cada uno de los casos comentados en el inicio de esta sección (apartado 3.4), se calculan las reacciones y las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes. Así, una vez conocidos los esfuerzos máximos, será posible evaluar la combinación de las sollicitaciones en los puntos más desfavorables y dimensionar los elementos que conforman la pluma y la contrapluma.

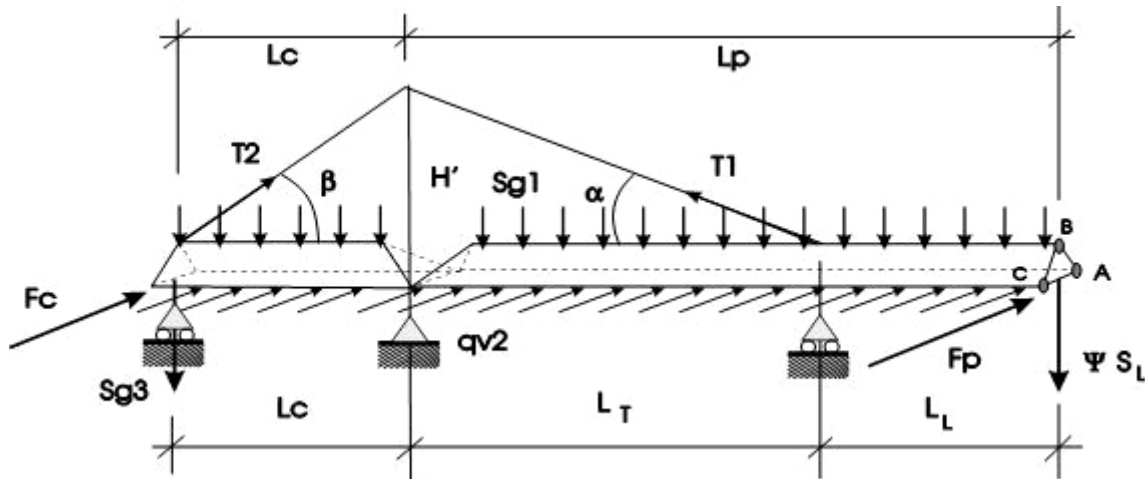


Figura 43. Diseño de la pluma: estado crítico de carga

3.4.2.1 Caso I: Carga de servicio en punta

En esta ocasión se tiene una viga simplemente apoyada e isostática con las cargas distribuidas de la manera indicada en la figura 44.

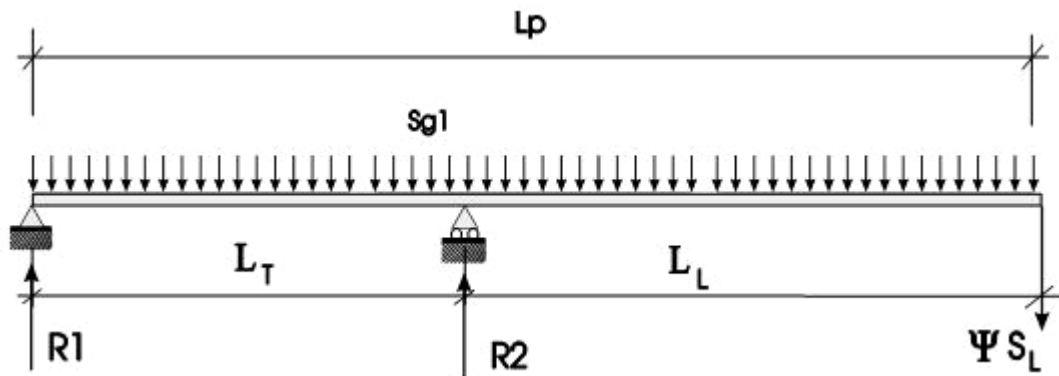


Figura 44. Distribución de cargas en la pluma en el caso I: carga de servicio en punta.

Puesto que el apoyo 2 es el generado por el tirante, hay que descomponer esta reacción en la dirección del tirante para así conocer el esfuerzo al que está solicitado (figura 45).

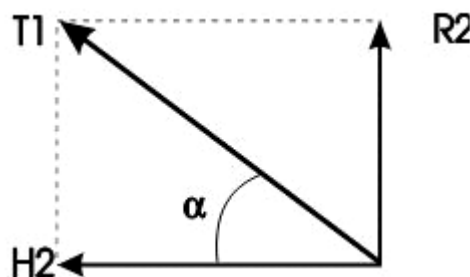


Figura 45. Descomposición de la carga generada por el tirante

3.4.2.2 Caso II: Carga en el anclaje del tirante

Para esta situación no se tienen ni cortantes ni momentos de consideración debido a que el tirante es el que soporta la mayor parte de carga siendo, el mismo, el punto donde existirá la mayor tracción. Por tanto, será dicho punto en el que se verifique la resistencia.

La distribución de las cargas en este caso se representa en la figura 46:

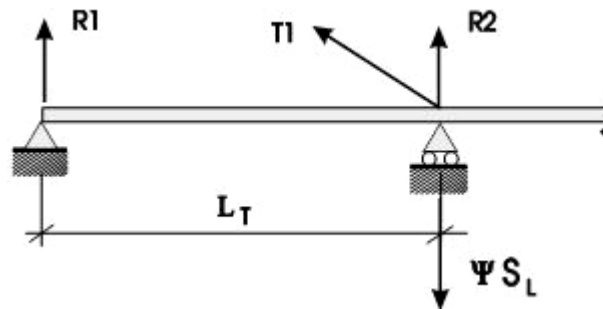


Figura 46. Distribución de cargas en la pluma en el caso II: carga en el anclaje del tirante

En esta hipótesis los momentos son muy pequeños comparados con las demás porque se deben únicamente al peso propio ya que el tirante absorbe la carga.

3.4.2.3 Caso III: Carga en servicio en el centro de la pluma.

En este caso se tendrán los mayores momentos en la pluma, estando las cargas distribuidas de la forma indicada en la figura 47:

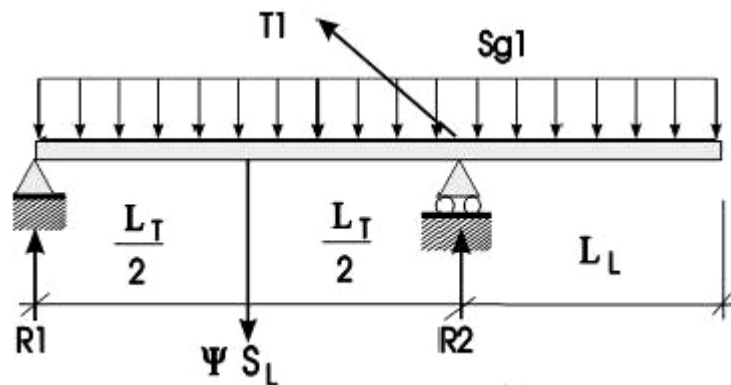


Figura 47. Distribución de cargas en la pluma en el caso III: carga en servicio en el centro de la pluma.

3.4.2.4 Caso IV: Carga en la contrapluma.

Debido a que los momentos flectores van a ser más pequeños, los elementos de la contrapluma se encontrarán mucho menos solicitados. La distribución de cargas en este caso se muestra en la figura 48.

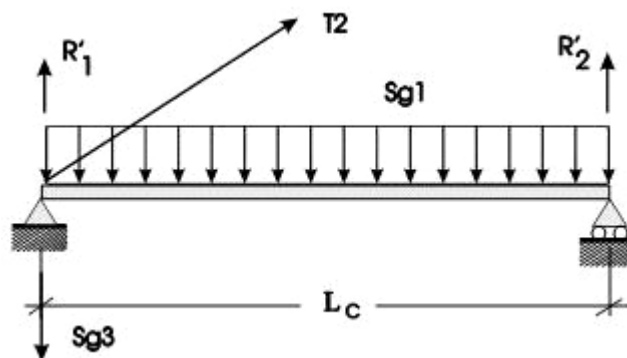


Figura 48. Distribución de cargas en la pluma en el caso IV: carga en la contrapluma.

3.4.2.5 Caso V: Cargas horizontales.

Se verifica que la estructura aguanta el esfuerzo producido por el viento en dirección perpendicular a la pluma.

La pluma se comportará como dos voladizos empotrados en el mástil y tendrá que soportar los momentos producidos por la acción del viento tanto en la carga de servicio como en el contrapeso (figura 49).

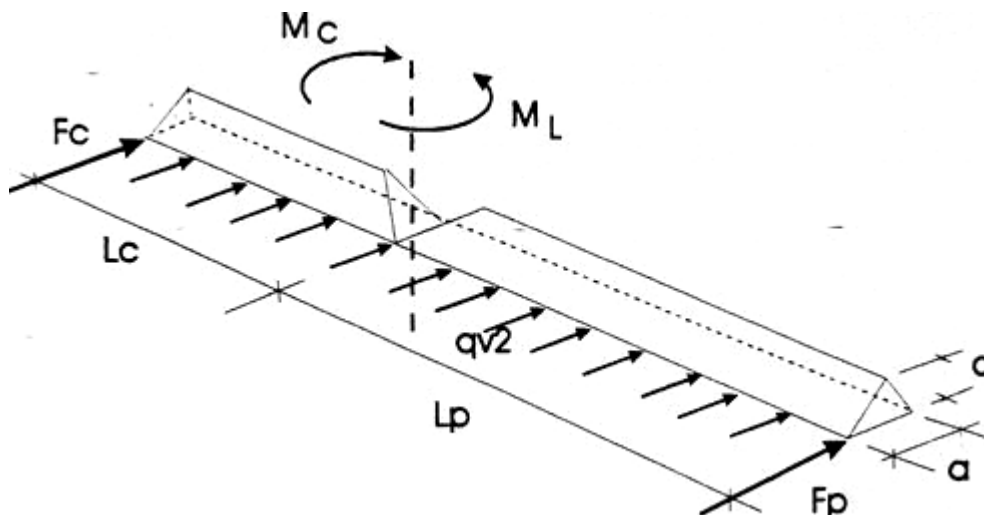


Figura 49. Distribución de cargas en la pluma en el caso V: cargas horizontales.

3.4.3 Diseño de los elementos del castillete.

Para la comprobación del castillete se tendrán en cuenta los esfuerzos que, sobre el mismo, producen el tirante, el viento y el peso propio (figura 50).

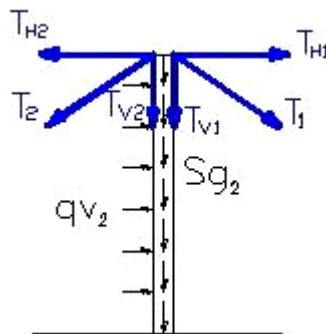


Figura 50. Cargas sobre el castillete.

3.4.4 Diseño de la zapata.

Con la pluma orientada en la dirección del viento (hipótesis III) se produce el mayor de los momentos flectores. Por lo tanto se utilizarán las solicitaciones en ese caso y se calculará la zapata (figura 51).

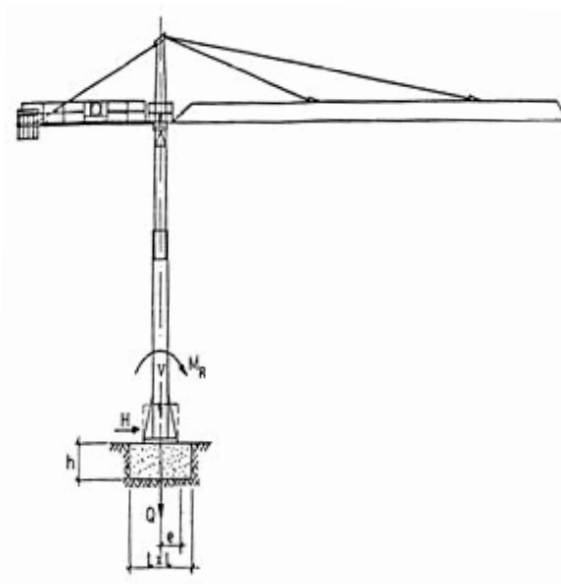


Figura 51. Cargas sobre la base del mástil para el cálculo de la zapata.

No se profundizará más en el cálculo de la zapata ya que es similar al cálculo realizado en zapatas de construcción y no es objeto de este proyecto.

Capítulo 4

Aplicación de la normativa vigente al cálculo de la grúa torre Potain MCT 88

4.1 Introducción.

Con objeto de detectar las diferencias entre el método de cálculo de las grúas torre definido por la normativa vigente y el método de cálculo a través de un modelo de elementos finitos que se planteará en el capítulo 6, se procede a realizar la verificación estructural de la grúa torre Potain MCT 88 utilizando el método explicado en el capítulo anterior.

Para la obtención de los esfuerzos axiales y de los momentos flectores generados como consecuencia de las combinaciones de solicitaciones que serán consideradas se ha utilizado la aplicación informática ED-TRIDIM.

4.2 Determinación de las solicitaciones.

Para que el cálculo que se realiza a continuación sea comparable al que se realizará posteriormente por el MEF, las solicitaciones que se determinarán serán las mismas que se utilizarán en el modelo de elementos finitos.

4.2.1 Determinación de las solicitaciones principales.

- Solicitaciones debidas al peso propio (ver figura 52)

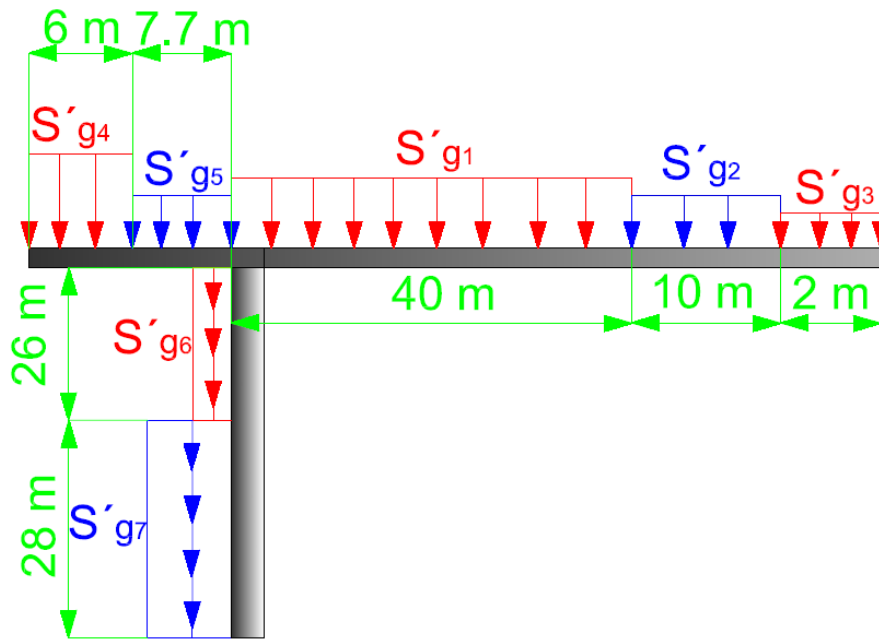


Figura 52. Solicitaciones debidas al peso propio.

$$S'_{g1} = 1.31 \text{ kN/m}$$

$$S'_{g2} = 3.63 \text{ kN/m}$$

$$S'_{g3} = 0.6 \text{ kN/m}$$

$$S'_{g4} = 22.17 \text{ kN/m}$$

$$S'_{g5} = 3.19 \text{ kN/m}$$

$$S'_{g6} = 2.66 \text{ kN/m}$$

$$S'_{g7} = 3.64 \text{ kN/m}$$

- Solicitaciones debidas a la carga máxima de servicio (ver figura 53).

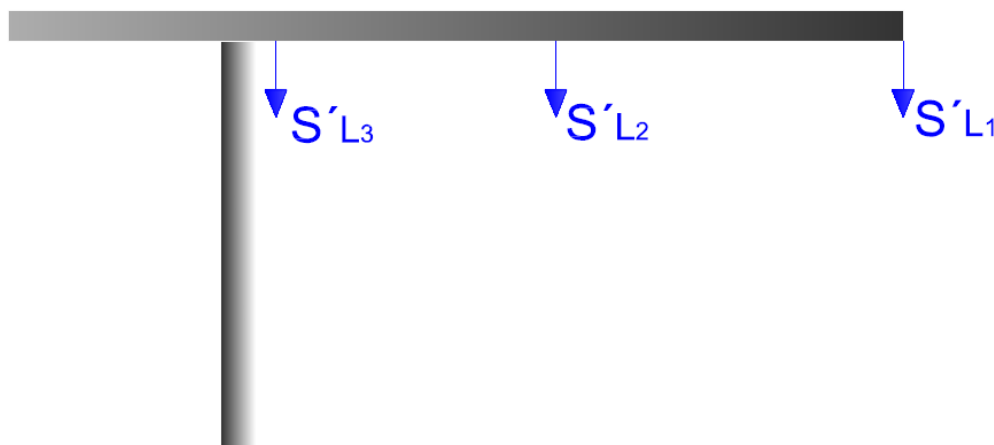


Figura 53. Solicitaciones debidas a la carga de servicio.

Estas tres solicitaciones nunca actúan simultáneamente, sino que en cada hipótesis de cálculo que se realice actuará una de ellas individualmente, ya que representan la carga que se podría elevar en distintas posiciones.

$$S'_{L1} = 11,5 \text{ kN}$$

$$S'_{L2} = 25 \text{ kN}$$

$$S'_{L3} = 50 \text{ kN}$$

4.2.2 Determinación de las solicitaciones debidas a movimientos verticales.

Las solicitaciones debidas a movimientos verticales se obtienen se obtienen multiplicando la carga de servicio por el “coeficiente dinámico” anteriormente definido. En este caso se tendría:

$$\varphi = 1 + \varepsilon V_L = 1 + 0.3 \cdot 1 = 1.3$$

Sin embargo, como también se explica en apartados anteriores, esta solicitación es despreciada.

4.2.3 Determinación de las solicitaciones debidas a movimientos horizontales y a efectos de choque.

Considerando que la grúa torre Potain MCT 88 no tiene capacidad de traslación y que posee limitadores de velocidad que impiden que el carro de la pluma supere los

0,7 m/s, no será necesario tener en cuenta los esfuerzos debidos a movimientos horizontales de traslación y a efectos de choque.

4.2.4 Solicitaciones debidas a los efectos climáticos.

A efectos de homogeneizar el cálculo actual y el que se realizará con el MEF, las solicitaciones debidas e efectos climáticos serán despreciadas en ambos supuestos.

4.3 Obtención de la combinación crítica de las solicitaciones.

Puesto que han sido despreciadas las cargas debidas a efectos climáticos, en la comprobación de los elementos del mástil no se considerará otra hipótesis distinta a la **hipótesis I**.

En cuanto al diseño de la pluma, no se considerará el caso II, por carecer la grúa estudiada de tirantes, ni el caso V, por no considerarse el viento.

El castillete, debido a la ausencia de tirantes que generen esfuerzos sobre él, se incluirá como parte del mástil y el diseño de la zapata se obviará en este caso.

En cuanto a los coeficientes de mayoración o minoración de cargas, se utilizarán los valores marcados en la norma:

- Coeficiente de mayoración o minoración de cargas debidas al peso propio(γ_G):
 - 1) Favorable $\rightarrow \gamma_G = 0,8$
 - 2) Desfavorable $\rightarrow \gamma_G = 1,35$
- Coeficiente de mayoración o minoración de cargas debidas a la carga de servicio(γ_C):
 - 1) Favorable $\rightarrow \gamma_C = 0$
 - 2) Desfavorable $\rightarrow \gamma_C = 1,5$

De esta forma se obtendrán las siguientes solicitaciones de cálculo:

$$\begin{aligned}S_{gi} &= \gamma_G S'_{gi} \\S_{Li} &= \gamma_C S'_{Li}\end{aligned}$$

Por otro lado, también se aplicará el coeficiente de disminución del límite elástico del material $\gamma_{M0} = 1,15$, con lo que la resistencia de cálculo del acero utilizado será:

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{355 \text{ MPa}}{1,15} = 308.69 \text{ MPa}$$

De esta manera, con objeto de buscar la combinación crítica de solicitaciones sin obviar ninguno de los casos marcados por la norma se seguirá el siguiente esquema:

- **Caso I: Carga de servicio en punta de flecha (S'_{L1})**
 - a) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L1}$ desfavorables.
 - b) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L1}$ desfavorables y S'_{g4}, S'_{g5} favorables.
 - c) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L1}$ favorables y S'_{g4}, S'_{g5} desfavorables.
 - d) Caso a) con S'_{L1} favorable.
 - e) Caso b) con S'_{L1} favorable.
 - f) Caso c) con S'_{L1} desfavorable.
- **Caso II: Carga de servicio en la zona media de la pluma (S'_{L2})**
 - a) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L2}$ desfavorables.
 - b) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L2}$ desfavorables y S'_{g4}, S'_{g5} favorables.
 - c) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L2}$ favorables y S'_{g4}, S'_{g5} desfavorables.
 - d) Caso a) con S'_{L2} favorable.
 - e) Caso b) con S'_{L2} favorable.
 - f) Caso c) con S'_{L2} desfavorable.
- **Caso III: Carga de servicio en la zona del castillete (S'_{L3})**
 - a) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L3}$ desfavorables.
 - b) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L3}$ desfavorables y S'_{g4}, S'_{g5} favorables.
 - c) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L3}$ favorables y S'_{g4}, S'_{g5} desfavorables.
 - d) Caso a) con S'_{L3} favorable.
 - e) Caso b) con S'_{L3} favorable.
 - f) Caso c) con S'_{L3} desfavorable.

4.3.1 Caso I: carga de servicio en punta de flecha (S'_{L1}).

a) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L1}$ desfavorables.

$$S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m}$$

$$S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m}$$

$$S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m}$$

$$S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m}$$

$$S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m}$$

$$S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m}$$

$$S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m}$$

$$S_{L1} = 17.25 \text{ kN}$$

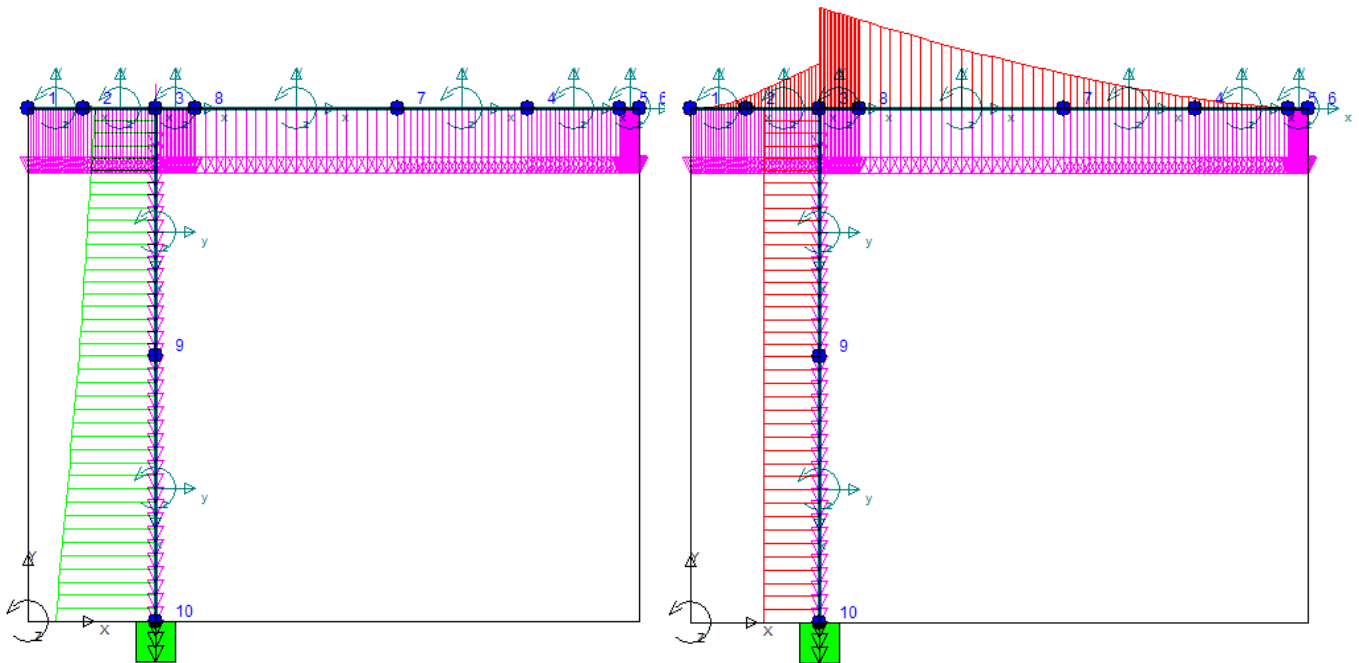


Figura 54. Caso I.a: Diagramas de esfuerzos axiales y momentos flectores.

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 582 \text{ kN}$$

$$M = 2540 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos (ver figura 54) tendrán el valor de:

$$N = 582 \text{ kN}$$

$$M_{\text{torre}} = 2540 \text{ kNm}$$

$$M_{\text{pluma}} = 4590 \text{ kNm}$$

b) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L1}$ desfavorables y S'_{g4}, S'_{g5} favorables.

$$S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m}$$

$$S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m}$$

$$S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m}$$

$$S_{g4} = 17.74 \text{ kN/m}$$

$$S_{g5} = 2.55 \text{ kN/m}$$

$$S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m}$$

$$S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m}$$

$$S_{L1} = 17.25 \text{ kN}$$

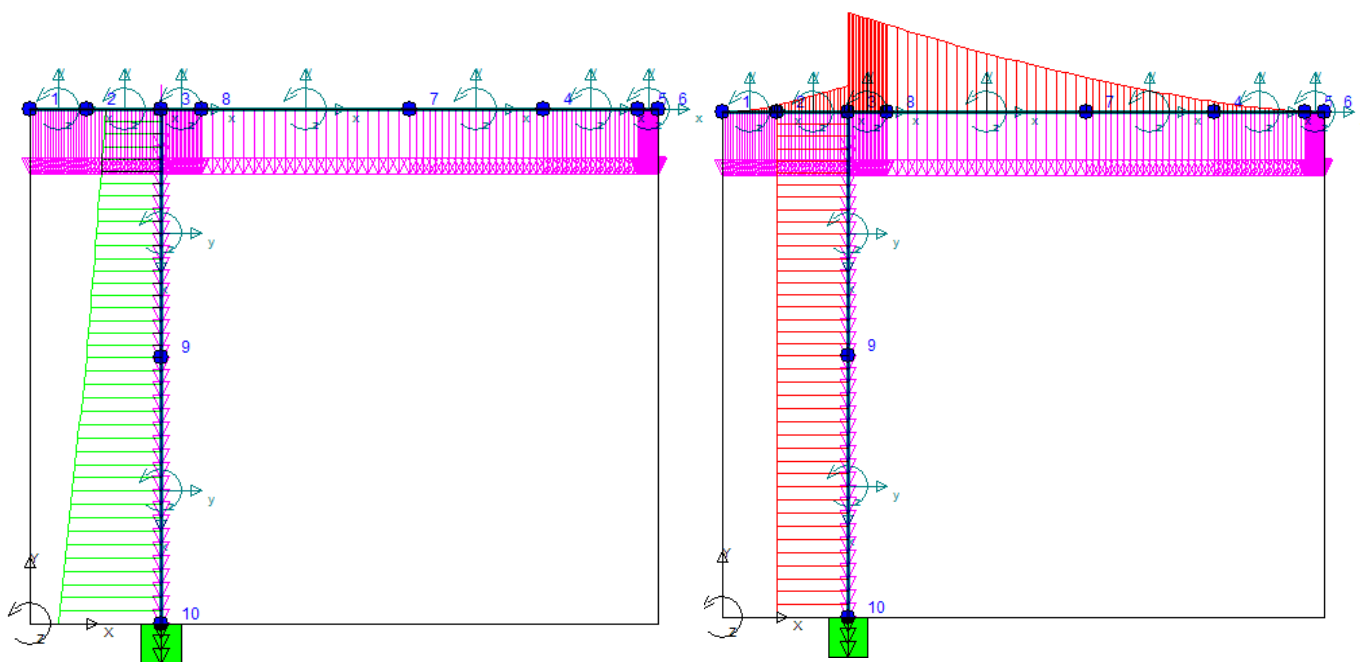


Figura 55. Caso I.b: Diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores.

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 495 \text{ kN} \quad M = 3370 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos (ver figura 55) tendrán el valor de:

$$N = 495 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 3370 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 4010 \text{ kNm}$$

c) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L1}$ favorables y S'_{g4}, S'_{g5} desfavorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.05 \text{ kN/m} & S_{g2} = 2.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.48 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 2.13 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 2.91 \text{ kN/m} & S_{L1} = 0 \text{ kN} & \end{array}$$

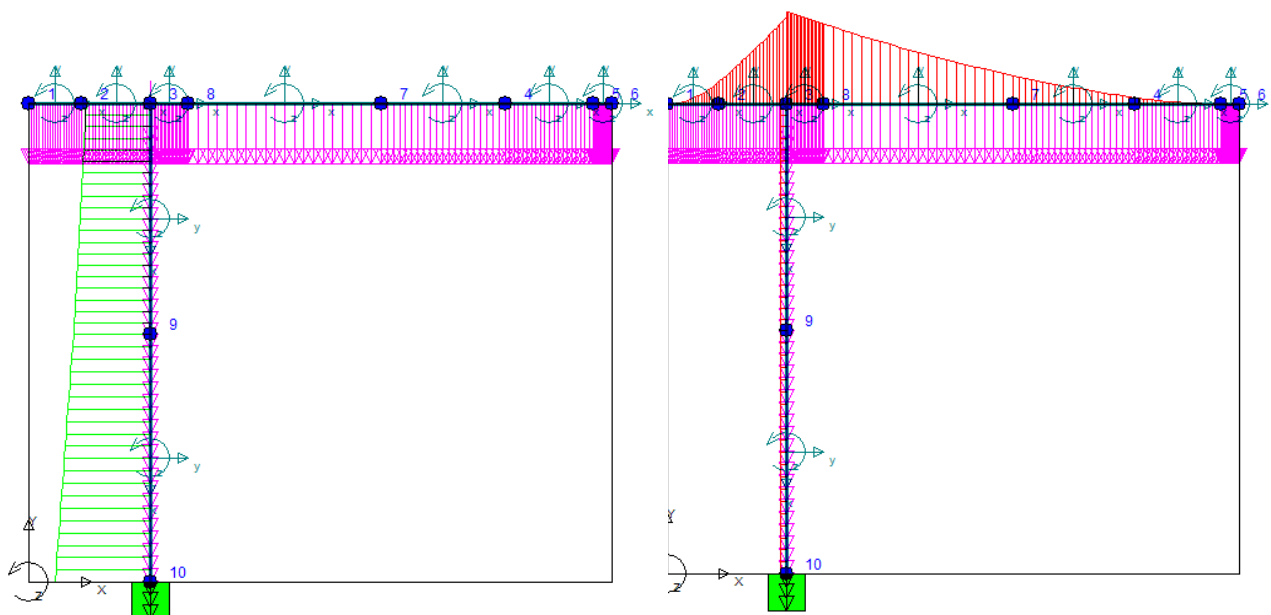


Figura 56. Caso I.c: Diagramas de esfuerzos axiales y momentos flectores.

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 421 \text{ kN} \quad M = 137 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos (ver figura 56) tendrán el valor de:

$$N = 421 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 137 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 1890 \text{ kNm}$$

d) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{g6}, S'_{g7}$ desfavorables y S'_{L1} favorable.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m} & S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m} & S_{L1} = 0 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 565 \text{ kN} \quad M = 1640 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos (ver figura 57) tendrán el valor de:

$$N = 565 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 1640 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 3180 \text{ kNm}$$

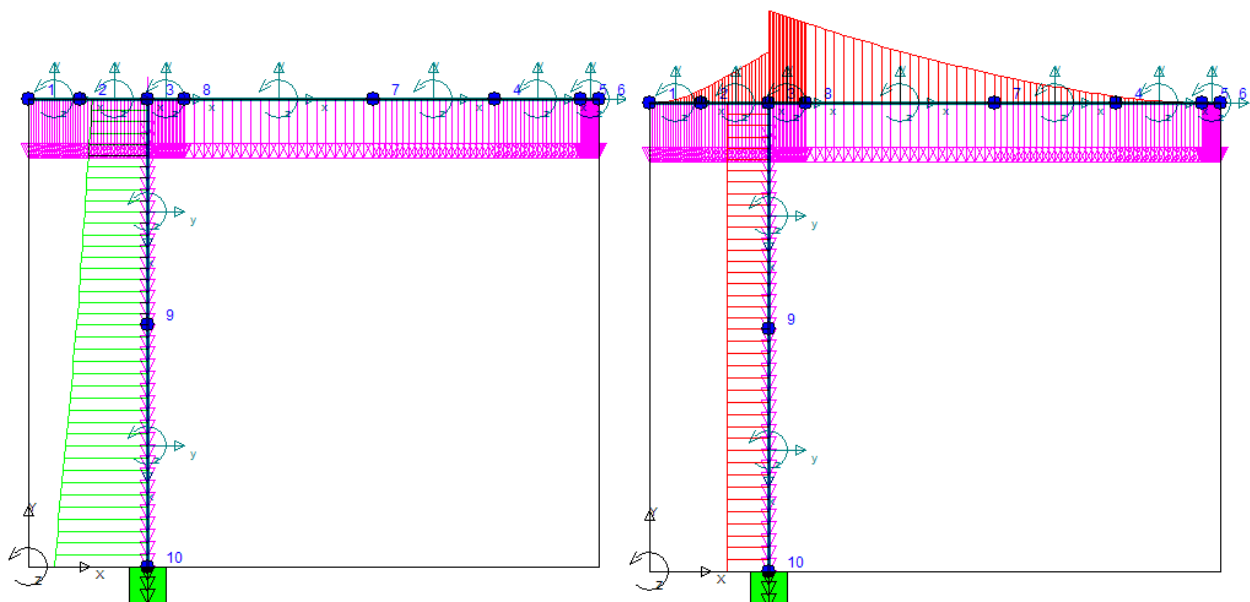


Figura 57. Caso I.d: Diagramas de esfuerzos axiales y momentos flectores.

e) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}$ desfavorables y $S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{L1}$ favorables.

$$S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m}$$

$$S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m}$$

$$S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m}$$

$$S_{g4} = 17.74 \text{ kN/m}$$

$$S_{g5} = 2.55 \text{ kN/m}$$

$$S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m}$$

$$S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m}$$

$$S_{L1} = 0 \text{ kN}$$

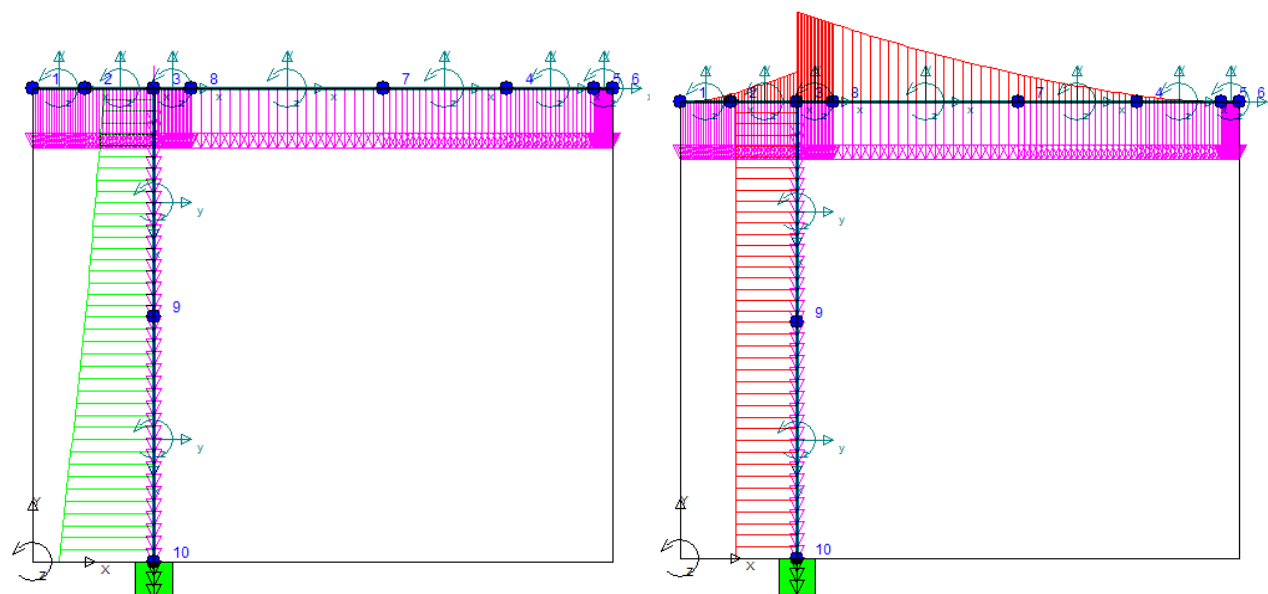


Figura 58. Caso I.e: Diagramas de esfuerzos axiales y momentos flectores.

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 478 \text{ kN} \quad M = 2470 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos (ver figura 58) tendrán el valor de:

$$N = 478 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 2470 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 3690 \text{ kNm}$$

f) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}$ favorables y $S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{L1}$ desfavorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.05 \text{ kN/m} & S_{g2} = 2.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.48 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 2.13 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 2.91 \text{ kN/m} & S_{L1} = 17.25 \text{ kN} & \end{array}$$

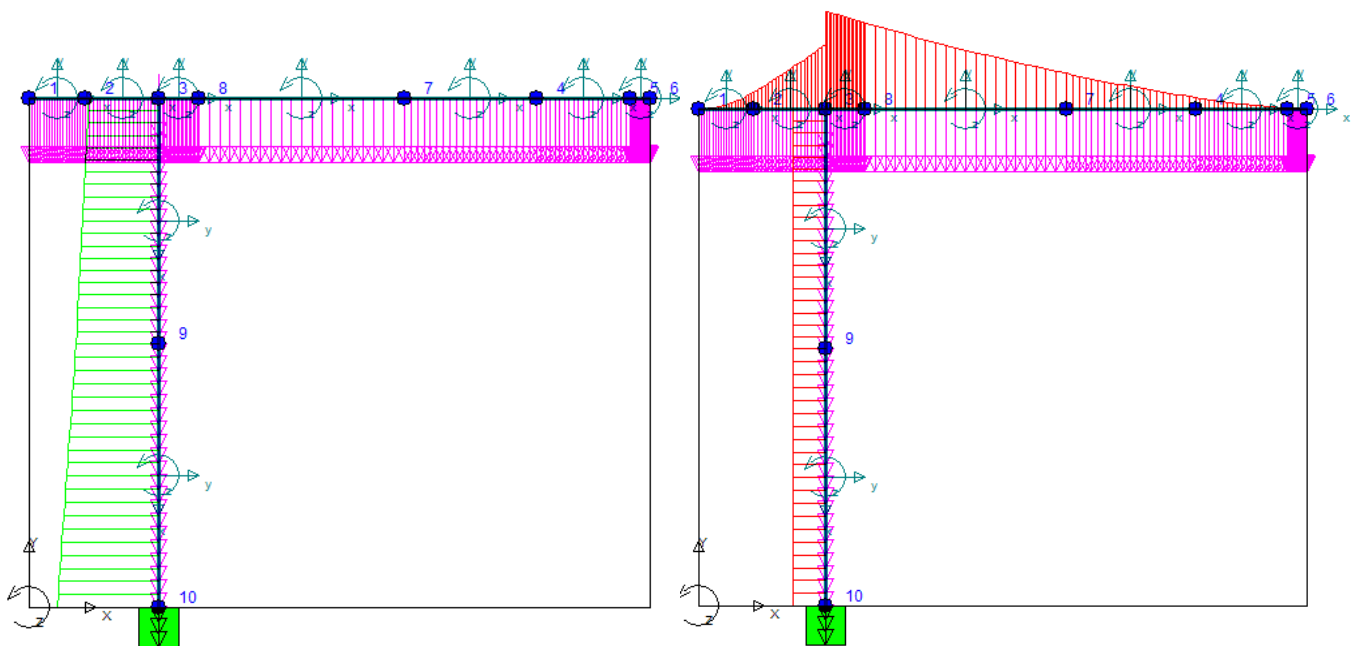


Figura 59. Caso I.f: Diagramas de esfuerzos axiales y momentos flectores.

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 439 \text{ kN} \quad M = 1030 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos (ver figura 59) tendrán el valor de:

$$N = 439 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 1030 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 3080 \text{ kNm}$$

4.3.2 Caso II: carga de servicio en la zona media de la pluma (S'_{L2}).

El proceso de resolución del caso II es el igual que el del caso I, pero variando el valor y posición de la carga de servicio. Los valores de las cargas y los resultados obtenidos de los distintos subcasos se resumen a continuación:

a) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L2}$ desfavorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m} & S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m} & S_{L2} = 37.5 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 602 \text{ kN} \quad M = 2610 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 602 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 2610 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 4660 \text{ kNm}$$

b) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L2}$ desfavorables y S'_{g4}, S'_{g5} favorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m} & S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 17.74 \text{ kN/m} & S_{g5} = 2.55 \text{ kN/m} & S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m} & S_{L2} = 37.5 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 516 \text{ kN} \quad M = 3450 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 516 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 3450 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 4660 \text{ kNm}$$

c) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L2}$ favorables y S'_{g4}, S'_{g5} desfavorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.05 \text{ kN/m} & S_{g2} = 2.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.48 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 2.13 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 2.91 \text{ kN/m} & S_{L2} = 0 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 421 \text{ kN} \quad M = 137 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 421 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 137 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 1890 \text{ kNm}$$

d) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{g6}, S'_{g7}$ desfavorables y S'_{L2} favorable.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m} & S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m} & S_{L2} = 0 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 565 \text{ kN} \quad M = 1640 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 565 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 1640 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 3180 \text{ kNm}$$

e) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}$ desfavorables y $S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{L2}$ favorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m} & S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 17.74 \text{ kN/m} & S_{g5} = 2.55 \text{ kN/m} & S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m} & S_{L2} = 0 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 478 \text{ kN} \quad M = 2470 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 478 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 2470 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 3690 \text{ kNm}$$

f) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}$ favorables y $S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{L2}$ desfavorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.05 \text{ kN/m} & S_{g2} = 2.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.48 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 2.13 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 2.91 \text{ kN/m} & S_{L2} = 37.5 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 459 \text{ kN} \quad M = 1110 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 459 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 1110 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 3160 \text{ kNm}$$

4.3.3 Caso III: carga de servicio en la zona del castillete (S'_{L3}).

El proceso de resolución del caso III es el igual que los de los casos I y II, pero variando el valor y posición de la carga de servicio. Los valores de las cargas y los resultados obtenidos de los distintos subcasos se resumen a continuación:

a) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L3}$ desfavorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m} & S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m} & S_{L3} = 50 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 640 \text{ kN} \quad M = 1960 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 640 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 1960 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 4010 \text{ kNm}$$

b) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L3}$ desfavorables y S'_{g4}, S'_{g5} favorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m} & S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 17.74 \text{ kN/m} & S_{g5} = 2.55 \text{ kN/m} & S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m} & S_{L3} = 50 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 553 \text{ kN} \quad M = 2800 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 553 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 2800 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 4010 \text{ kNm}$$

c) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}, S'_{L3}$ favorables y S'_{g4}, S'_{g5} desfavorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.05 \text{ kN/m} & S_{g2} = 2.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.48 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 2.13 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 2.91 \text{ kN/m} & S_{L3} = 0 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 421 \text{ kN} \quad M = 137 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 421 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 137 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 1890 \text{ kNm}$$

d) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{g6}, S'_{g7}$ desfavorables y S'_{L3} favorable.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m} & S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m} & S_{L1} = 0 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 565 \text{ kN} \quad M = 1640 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 565 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 1640 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 3180 \text{ kNm}$$

e) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}$ desfavorables y $S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{L3}$ favorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.77 \text{ kN/m} & S_{g2} = 4.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.81 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 17.74 \text{ kN/m} & S_{g5} = 2.55 \text{ kN/m} & S_{g6} = 3.6 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 4.91 \text{ kN/m} & S_{L3} = 0 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 478 \text{ kN} \quad M = 2470 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 478 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 2470 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 3690 \text{ kNm}$$

f) Cargas $S'_{g1}, S'_{g2}, S'_{g3}, S'_{g6}, S'_{g7}$ favorables y $S'_{g4}, S'_{g5}, S'_{L3}$ desfavorables.

$$\begin{array}{lll} S_{g1} = 1.05 \text{ kN/m} & S_{g2} = 2.9 \text{ kN/m} & S_{g3} = 0.48 \text{ kN/m} \\ S_{g4} = 29.93 \text{ kN/m} & S_{g5} = 4.3 \text{ kN/m} & S_{g6} = 2.13 \text{ kN/m} \\ S_{g7} = 2.91 \text{ kN/m} & S_{L3} = 50 \text{ kN} & \end{array}$$

Las reacciones que aparecen en la base serán:

$$V = 496 \text{ kN} \quad M = 459 \text{ kNm}$$

Los esfuerzos máximos tendrán el valor de:

$$N = 496 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 459 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 2510 \text{ kNm}$$

4.3.4 Conclusión.

Analizando los resultados obtenidos a partir de los anteriores cálculos, se observa que la combinación crítica de cargas será la definida por el **caso II.b**, caso en el que aparecen los momentos flectores de mayor magnitud. Así, se obtienen los siguientes datos para la verificación estructural:

$$N = 516 \text{ kN} \quad M_{\text{torre}} = 3450 \text{ kNm} \quad M_{\text{pluma}} = 4660 \text{ kNm}$$

4.4 Comprobación de la resistencia estructural aplicando la combinación crítica de solicitaciones.

Aislando la celosía de la torre de la grúa (figura 60) se tiene que, sobre los perfiles, los esfuerzos máximos son:

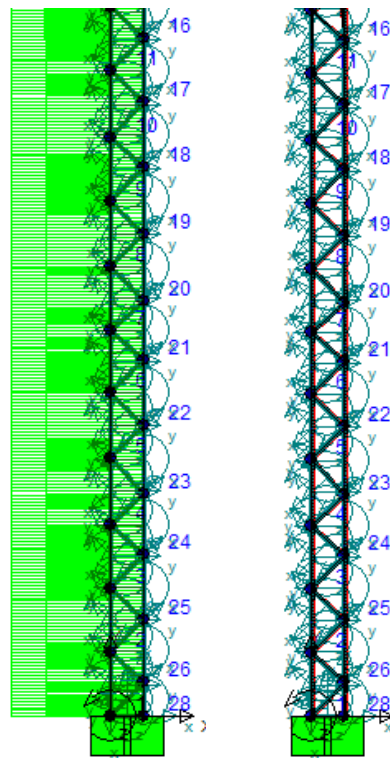


Figura 60. Esfuerzos axiales y momentos flectores sobre los largueros y celosía de la torre.

- Celosía: $\begin{cases} M_{f,max} = 10.7 \text{ kNm} \\ N_{max} = 1.99 \text{ kN} \end{cases}$

- Largueros: $\begin{cases} M_{f,max} = 22.4 \text{ kNm} \\ N_{max} = 129 \text{ kN} \end{cases}$

Aislando la celosía de la pluma de la grúa (figura 61) se tiene que, sobre los perfiles, los esfuerzos máximos son:

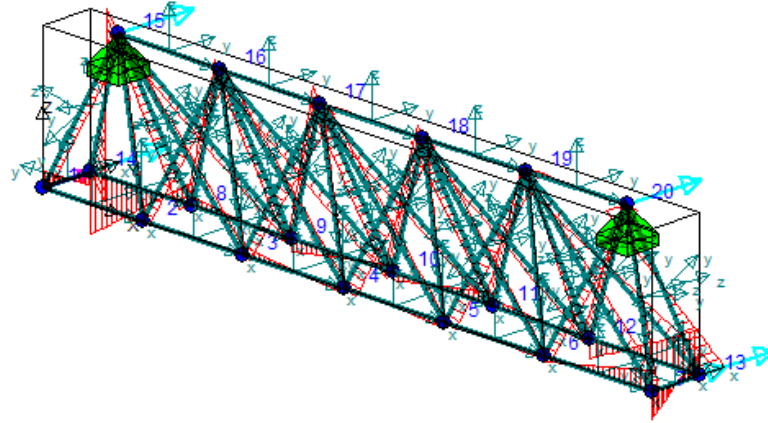


Figura 61. Momentos flectores sobre los largueros y celosía de la pluma.

- Celosía: $M_{f,max} = 117.4 \text{ kNm}$
- Largueros: $M_{f,max} = 224.4 \text{ kNm}$

4.4.1 Resistencia de los largueros de la torre a flexión y a compresión.

Se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} N_d &= 129 \text{ kN} \leq N_{Rd} = A \cdot f_{yd} \\ M_d &= 22.4 \leq M_{Rd} = W_{el} \cdot f_{yd} \\ \frac{N_d}{N_{Rd}} + \frac{M_d}{M_{Rd}} &\leq 1 \end{aligned}$$

- a) Mástil inferior con largueros constituidos por tubos cuadrados 140x140x12 mm

$$N_d \leq N_{Rd} = A \cdot f_{yd} = 55.3 \cdot 10^2 \cdot 338,09 = 1869 \text{ kN} \Rightarrow \text{OK}$$

$$\begin{aligned} M_d \leq M_{Rd} &= W_{el} \cdot f_{yd} = 187 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6 = 63.22 \text{ kNm} \Rightarrow \text{OK} \\ \frac{22.4 \text{ kNm}}{63.22 \text{ kNm}} + \frac{129 \text{ kN}}{1869 \text{ kN}} &= 0,42 \leq 1 \Rightarrow \text{OK} \end{aligned}$$

- b) Mástil superior con largueros constituidos por perfiles angulares de lados iguales 150x150x14 mm

$$N_d \leq N_{Rd} = A \cdot f_{yd} = 40.3 \cdot 10^2 \cdot 338,09 = 1362 \text{ kN} \Rightarrow \text{OK}$$

$$M_d \leq M_{Rd} = W_{el} \cdot f_{yd} = 78.33 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6 = 26.48 \text{ kNm} \Rightarrow \text{OK}$$

$$\frac{22.4 \text{ kNm}}{26.48 \text{ kNm}} + \frac{129 \text{ kN}}{1362 \text{ kN}} = 0.94 \leq 1 \Rightarrow \text{OK}$$

4.4.2 Resistencia de los largueros de la torre a pandeo.

Debe de cumplirse que:

$$\frac{N_d}{\chi_y A f_{yd}} + k_y \frac{c_{m,y} M_{yd} + e_{N,y} \cdot N_{Ed}}{\chi_{LT} W_y f_{yd}} + \alpha_z k_z \frac{c_{m,z} M_{zd} + e_{N,z} N_d}{W_z f_{yd}} \leq 1$$

$$\frac{N_d}{\chi_z A f_{yd}} + \alpha_y k_y \frac{c_{m,y} M_{yd} + e_{N,y} \cdot N_{Ed}}{W_y f_{yd}} + k_z \frac{c_{m,z} M_{zd} + e_{N,z} N_d}{W_z f_{yd}} \leq 1$$

- a) Mástil inferior con largueros constituidos por tubos cuadrados 140x140x12 mm

$$\begin{aligned} N_d &= 129 \text{ kN} & M_{yd} &= 22.4 \text{ kNm} & M_{zd} &= 0 & A &= 55.3 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \\ f_{yd} &= 338.09 \text{ MPa} & \alpha_y &= \alpha_z = 0.6 & \chi_{LT} &= 1 & e_{N,y} &= e_{N,z} = 0 \end{aligned}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{55.3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 355 \cdot 10^6}{3689 \cdot 10^3}} = 0.73$$

$$\left. \begin{aligned} N_{cr,y} &= \left(\frac{\pi}{L_k}\right) EI = \left(\frac{\pi}{0.5 \cdot 5}\right) 210 \cdot 10^9 \cdot 1398 \cdot 10^4 \cdot 10^{-12} = 3689 \text{ kN} \\ N_{cr,z} &= \left(\frac{\pi}{L_k}\right) EI = \left(\frac{\pi}{0.5 \cdot 5}\right) 210 \cdot 10^9 \cdot 1398 \cdot 10^4 \cdot 10^{-12} = 3689 \text{ kN} \end{aligned} \right\} \chi_y = 0.97$$

$$\chi_y = \chi_z = 0.97 \quad c_{m,y} = 0.95 \quad k_y = 1 + (0.73 - 0.2) \cdot \frac{22.4 \cdot 10^3}{0.97 \cdot 3689 \cdot 10^3} = 1.003$$

$$\frac{129 \cdot 10^3}{0.97 \cdot 55.3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 338,09 \cdot 10^6} + 1.003 \frac{0.95 \cdot 22.4 \cdot 10^3}{187 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6}$$

$$= 0.069 + 0.34 = 0.41 \leq 1 \Rightarrow \text{OK}$$

$$\frac{129 \cdot 10^3}{0.97 \cdot 55.3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 338,09 \cdot 10^6} + 0.6 \cdot 1.003 \frac{0.95 \cdot 22.4 \cdot 10^3}{187 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6}$$

$$= 0.069 + 0.203 = 0.272 \leq 1 \Rightarrow \text{OK}$$

b) Mástil superior con largueros constituidos por perfiles angulares de lados iguales 150x150x14 mm

$$\begin{aligned}
 N_d &= 129 \text{ kN} & M_{yd} &= 22.4 \text{ kNm} & M_{zd} &= 0 & A &= 40.3 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \\
 f_{yd} &= 338.09 \text{ MPa} & \alpha_y &= \alpha_z = 0.6 & \chi_{LT} &= 1 & e_{N,y} &= e_{N,z} = 0 \\
 \bar{\lambda} &= \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{40.33 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 355 \cdot 10^6}{2229.9 \cdot 10^3}} = 0.8 \\
 N_{cr,y} &= \left(\frac{\pi}{L_k}\right) EI = \left(\frac{\pi}{0.5 \cdot 5}\right) 210 \cdot 10^9 \cdot 845 \cdot 10^4 \cdot 10^{-12} = 2229.9 \text{ kN} \\
 N_{cr,z} &= \left(\frac{\pi}{L_k}\right) EI = \left(\frac{\pi}{0.5 \cdot 5}\right) 210 \cdot 10^9 \cdot 845 \cdot 10^4 \cdot 10^{-12} = 2229.9 \text{ kN} \\
 \chi_y &= \chi_z = 0.8 & c_{m,y} &= 0.95 & k_y &= 1 + (0.8 - 0.2) \cdot \frac{22.4 \cdot 10^3}{0.97 \cdot 2229.9 \cdot 10^3} = 1.006 \\
 \frac{129 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 40.3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 338.09 \cdot 10^6} + 1.003 \frac{0.95 \cdot 22.4 \cdot 10^3}{78.33 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338.09 \cdot 10^6} \\
 &= 0.12 + 0.81 = 0.925 \leq 1 \Rightarrow \text{OK} \\
 \frac{129 \cdot 10^3}{0.8 \cdot 40.3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 338.09 \cdot 10^6} + 0.6 \cdot 1.003 \frac{0.95 \cdot 22.4 \cdot 10^3}{78.33 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338.09 \cdot 10^6} \\
 &= 0.12 + 0.486 = 0.606 \leq 1 \Rightarrow \text{OK}
 \end{aligned}$$

4.4.3 Resistencia de los cordones de la torre a pandeo.

Debe de cumplirse que:

$$\begin{aligned}
 \frac{N_d}{\chi_y A f_{yd}} + k_y \frac{c_{m,y} M_{yd} + e_{N,y} N_{Ed}}{\chi_{LT} W_y f_{yd}} + \alpha_z k_z \frac{c_{m,z} M_{zd} + e_{N,z} N_d}{W_z f_{yd}} &\leq 1 \\
 \frac{N_d}{\chi_z A f_{yd}} + \alpha_y k_y \frac{c_{m,y} M_{yd} + e_{N,y} N_{Ed}}{W_y f_{yd}} + k_z \frac{c_{m,z} M_{zd} + e_{N,z} N_d}{W_z f_{yd}} &\leq 1
 \end{aligned}$$

a) Mástil inferior con cordones constituidos por tubos cuadrados 60x60x6.3 mm

$$\begin{aligned}
 N_d &= 1.99 \text{ kN} & M_{yd} &= 15.7 \text{ kNm} & M_{zd} &= 0 & A &= 12.2 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \\
 f_{yd} &= 338.09 \text{ MPa} & \alpha_y &= \alpha_z = 0.6 & \chi_{LT} &= 1 & e_{N,y} &= e_{N,z} = 0
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} &= \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{12.2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 355 \cdot 10^6}{270 \cdot 10^3}} = 1.26 \\ N_{cr,y} &= \left(\frac{\pi}{L_k}\right) EI = \left(\frac{\pi}{0.5 \cdot 2.66}\right) 210 \cdot 10^9 \cdot 54.4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-12} = 270 \text{ kN} \\ N_{cr,z} &= \left(\frac{\pi}{L_k}\right) EI = \left(\frac{\pi}{0.5 \cdot 2.66}\right) 210 \cdot 10^9 \cdot 54.4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-12} = 270 \text{ kN} \end{aligned} \right\} \chi_y = 0.5$$

$$\chi_y = \chi_z = 0.5 \quad c_{m,y} = 0.54 \quad k_y = 1 + (1.26 - 0.2) \cdot \frac{10.7 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 270 \cdot 10^3} = 1.1$$

$$\frac{1.99 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 12.2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 338,09 \cdot 10^6} + 1.1 \frac{0.5 \cdot 10.7 \cdot 10^3}{23.4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6}$$

$$= 0.009 + 0.74 = 0.749 \leq 1 \Rightarrow \text{OK}$$

$$\frac{1.99 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 12.2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 338,09 \cdot 10^6} + 0.6 \cdot 1.1 \frac{0.5 \cdot 10.7 \cdot 10^3}{23.4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6}$$

$$= 0.009 + 0.44 = 0.449 \leq 1 \Rightarrow \text{OK}$$

b) Mástil superior con largueros constituidos por perfiles angulares de lados iguales 65x65x7 mm

$$\begin{aligned} N_d &= 1.99 \text{ kN} & M_{yd} &= 13.7 \text{ kNm} & M_{zd} &= 0 & A &= 8.7 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \\ f_{yd} &= 338.09 \text{ MPa} & \alpha_y &= \alpha_z = 0.6 & \chi_{LT} &= 1 & e_{N,y} &= e_{N,z} = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} &= \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{8.7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 355 \cdot 10^6}{1370 \cdot 10^3}} = 0.47 \\ N_{cr,y} &= \left(\frac{\pi}{L_k}\right) EI = \left(\frac{\pi}{0.5 \cdot 2.3}\right) 210 \cdot 10^9 \cdot 33.43 \cdot 10^4 \cdot 10^{-12} = 1370 \text{ kN} \\ N_{cr,z} &= \left(\frac{\pi}{L_k}\right) EI = \left(\frac{\pi}{0.5 \cdot 2.3}\right) 210 \cdot 10^9 \cdot 33.43 \cdot 10^4 \cdot 10^{-12} = 1370 \text{ kN} \end{aligned} \right\} \chi_y = 0.95$$

$$\chi_y = \chi_z = 0.95 \quad c_{m,y} = 0.56 \quad k_y = 1 + (0.47 - 0.2) \cdot \frac{10.7 \cdot 10^3}{0.95 \cdot 1370 \cdot 10^3} = 1.002$$

$$\frac{1.99 \cdot 10^3}{0.95 \cdot 8.7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 338,09 \cdot 10^6} + 1.002 \frac{0.56 \cdot 10.7 \cdot 10^3}{17.18 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6}$$

$$= 0.007 + 0.96 = 0.967 \leq 1 \Rightarrow \text{OK}$$

$$\frac{1.99 \cdot 10^3}{0.95 \cdot 8.7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 338,09 \cdot 10^6} + 0.6 \cdot 1.002 \frac{0.56 \cdot 10.7 \cdot 10^3}{17.18 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6}$$

$$= 0.007 + 0.576 = 0.583 \leq 1 \Rightarrow \text{OK}$$

4.4.4 Resistencia de pluma a flexión.

Se debe cumplir que:

$$M_d = 224.4 \leq M_{Rd} = W_{el} \cdot f_{yd}$$

a) Largueros de la pluma constituidos por perfiles UPE 360

$$M_d = 224.4 \text{ kNm} \leq M_{Rd} = 824 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6 = 278.6 \text{ kNm} \Rightarrow \textbf{OK}$$

b) Cordones de la pluma constituidos por perfiles redondos macizos de radio 20 mm

$$M_d = 117.4 \text{ kNm} \leq M_{Rd} = 341 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 338,09 \cdot 10^6 = 120.7 \text{ kNm} \Rightarrow \textbf{OK}$$

4.5 Conclusiones del análisis.

En este capítulo se ha explicado el método de cálculo de una grúa torre considerando la normativa vigente y, posteriormente se ha aplicado dicho método para la verificación estructural de la grúa torre Potain MCT 88.

En los siguientes capítulos se comparará este cálculo con el realizado a través del método de los elementos finitos, con objeto de demostrar la precisión y rapidez que este último ofrece.

No obstante, con el cálculo realizado en este capítulo, sin haber considerado las solicitaciones climáticas, queda evidenciada la complejidad que conlleva el método de cálculo de grúas torre aplicando la normativa vigente.

Capítulo 5

El método de los elementos finitos.

5.1 Introducción.

Las limitaciones de la mente humana son tales que no se puede captar el comportamiento del complejo mundo que la rodea en una sola operación global. Por ello, una forma natural de proceder de ingenieros, científicos e incluso de otro tipo de profesionales, como los economistas, consiste en separar los sistemas en sus componentes individuales o “elementos”, cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes. [3]

El método de los elementos finitos (MEF) ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas ingenieriles, físicos, etc., ya que permite solucionar casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por los métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a la creación de prototipos, a su ensayo y a ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que conlleva un alto coste, tanto económico como temporal.

El MEF permite generar un modelo matemático de cálculo del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. Sin embargo no deja de ser un método aproximado de cálculo, debido a las hipótesis básicas del método. Por ello, los prototipos, siguen siendo necesarios, pero en menor número, ya que el modelo de elementos finitos puede ser muy cercano al diseño óptimo. [3]

En muchos casos se obtiene un modelo adecuado utilizando un número finito de componentes bien definidos. A tales problemas se les denominará **discretos**. En otros, la subdivisión prosigue indefinidamente y el problema sólo puede definirse haciendo uso de la ficción matemática del infinitésimo. Ello conduce a ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes con un número infinito de elementos implicados. A tales problemas se les denominará **continuos**.

Con la llegada de los computadores digitales, los problemas discretos pueden resolverse generalmente sin dificultad, aún cuando el número de elementos sea muy elevado. Como la capacidad de los computadores es finita, los problemas continuos sólo pueden resolverse de forma exacta mediante manipulaciones matemáticas. En este aspecto, las técnicas matemáticas disponibles suelen limitar las posibilidades a casos extremadamente simplificados. Para vencer la infranqueabilidad que supone la solución de problemas continuos reales, ingenieros y matemáticos han ido proponiendo a través de los años diversos métodos de discretización. Para éstos, se hace necesario efectuar alguna aproximación de tal naturaleza que quepa esperar que la misma se acerque, tan estrechamente como se quiera, a la solución continua verdadera a medida que crezca el número de variables discretas. [3]

El método de los elementos finitos es relativamente nuevo y, aunque su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo, en los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances informáticos y, precisamente estos avances, han puesto a disposición de los usuarios gran cantidad de programas que permiten realizar cálculos con elementos finitos. No obstante, hay que tener en cuenta que el manejo correcto de estas herramientas conlleva un profundo conocimiento no solo del material con el que se trabaja, sino también de los principios del MEF. Sólo en ese caso se estará en condiciones de garantizar que los resultados obtenidos en los análisis se ajustan a la realidad. [4]

5.2 Historia del método de los elementos finitos.

Aunque el nombre “MEF” se ha establecido recientemente, el concepto se ha usado desde hace varios siglos. El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas ingenieriles o físicos es conocido desde antiguo. El concepto de elementos finitos parte de esa idea. [4]

Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podría realizarse una abstracción a la época de la construcción de las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Asimismo, Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos. Prueba de ello es que el matemático chino Lui Hui (300 d.C.)

empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3.1416. [4]

El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural fundamentalmente en el campo aeroespacial. En los años 40 Courant [5] propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigh- Ritz para aproximar soluciones.

Fueron Turner, Clough, Martin y Topp [6] quienes presentaron el MEF en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

El trabajo de revisión de Oden [7] presenta algunas de las contribuciones matemáticas importantes al MEF. Los libros de Przemieniecki [8] y de Zienkiewicz y Holister [9] presentan el MEF en su aplicación al análisis estructural. El libro de Zienkiewicz y Cheung [10] o Zienkiewicz [11] y Taylor presenta una interpretación amplia del MEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En él se demuestra que las ecuaciones de los elementos finitos pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, tal como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados. Esta visión del problema difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada.

Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo a las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Estas innovaciones, además de permitir la descentralización de los programas de elementos finitos, han contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados, tales como ANSYS (figura 62.). Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación. [4]



Figura 62. ANSYS, un programa de elementos finitos.

5.3 Fundamentos del análisis a través de elementos finitos.

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo con infinitos grados de libertad que es regido por una ecuación diferencial o por un sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones que pueden ser lineales o no.

En cualquier sistema a analizar puede distinguirse entre:

- Dominio, que es el espacio geométrico donde se va a analizar el sistema.
- Condiciones de contorno, que son las variables conocidas y que condicionan el cambio del sistema, tales como las cargas, los desplazamientos, las temperaturas, etc.
- Incógnitas, que son las variables del sistema que deseamos conocer tras la actuación de las condiciones de contorno sobre el sistema, tales como los desplazamientos, las tensiones, las temperaturas, etc.

El método de los elementos finitos supone que, para la solución del problema, se discretice el dominio en subdominios denominados elementos. El dominio se divide mediante puntos (en el caso lineal), mediante líneas (en el caso bidimensional) o mediante superficies (en el caso tridimensional) de manera que el dominio total de estudio resultante de la suma de dichos subdominios se aproxime al dominio real. Los elementos se definen a través de un número discreto de puntos llamados **nodos**, que conectan entre sí los distintos elementos. Sobre ellos se materializan las incógnitas fundamentales del problema. En el caso de los elementos estructurales, estas incógnitas son los desplazamientos nodales, ya que a partir de éstos se pueden obtener el resto de incógnitas de interés, como las tensiones o deformaciones. [4]

5.3.1 El modelo de elementos finitos.

Un modelo MEF es la idealización matemática de un sistema físico. Actualmente, la gran mayoría de los modelos de análisis por elementos finitos se construyen empleando un modelo sólido. Esta representación matemática tipo CAD de la estructura, define la geometría que debe dividirse en elementos a través de los nudos.

El modelo facilita en gran medida la aplicación de las condiciones de contorno del sistema y la realización de análisis. Sin embargo, el modelo sólido no participa en el

proceso de solución del análisis, sino que toda esta información es transferida al modelo de elementos finitos. [12]

En la figura 63 pueden observarse las diferencias entre el modelo de elementos finitos y el modelo sólido.

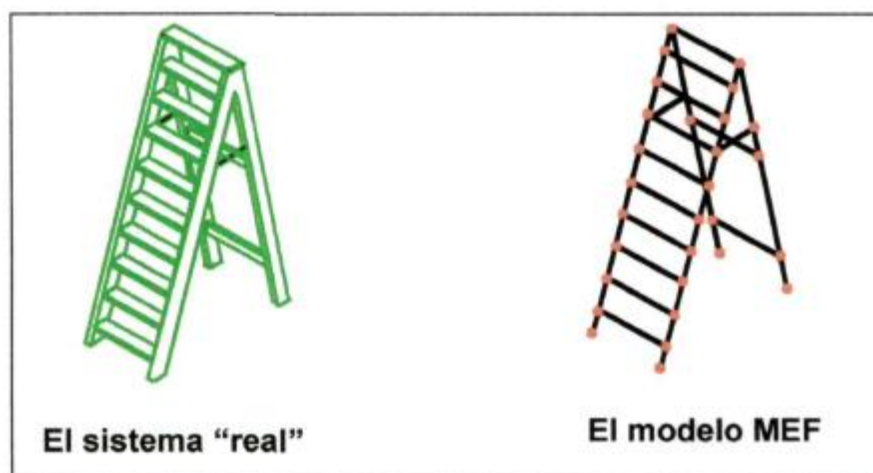


Figura 63. Ejemplo de modelo sólido y modelo de elementos finitos

5.3.2 Los grados de libertad.

Como ya se ha mencionado, en el caso de elementos estructurales, las incógnitas fundamentales del problema son los desplazamientos nodales. A éstas, se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Así, los grados de libertad de un nodo son las variables que determinan el estado y/o posición de un nodo [4]

Por ejemplo, si se estudia una viga en voladizo con una carga puntual, tal y como se muestra en la figura 64, el discretizado del dominio sería el representado en la figura 65. [4]

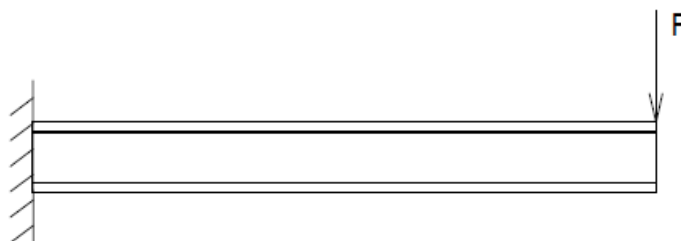


Figura 64. Viga en voladizo

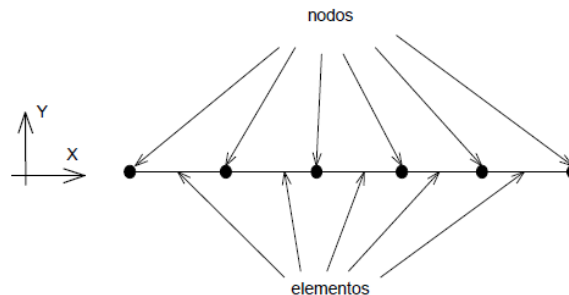


Figura 65. Discretizado de viga en voladizo

De este modo, los grados de libertad de cada nodo serán:

- Desplazamiento en dirección x
- Desplazamiento en dirección y
- Giro según z

Esto ocurriría en el caso de que se seleccionase un elemento viga de tres grados de libertad por nodo (posteriormente, en el apartado 4.5, se explicarán los tipos de elementos). En un caso genérico cada nodo tendría, en análisis estructural, seis grados de libertad, tal y como se observa en la figura 66.

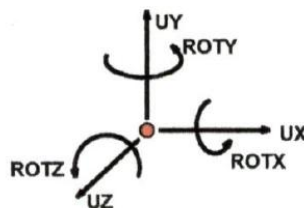


Figura 66. Grados de libertad estructurales

5.4 Principios generales aplicados a un continuo elástico.

A continuación se muestran algunas de las ideas básicas relacionadas con los fundamentos matemáticos del MEF aplicadas al caso estructural.

5.4.1 Ecuaciones de equilibrio. Principio de los trabajos virtuales (PTV).

Una gran cantidad de problemas de medios continuos vienen expresados mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno sobre la función o funciones

incógnitas. Ante la dificultad, y en muchos casos la imposibilidad, de encontrar una solución cerrada, se opta por realizar una aproximación, siendo necesaria la expresión integral del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).

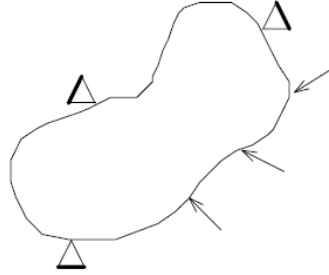


Figura 67. Continuo elástico genérico

Se considera un continuo elástico como el de la figura 67 sometido a unas fuerzas superficiales $\{t\} = \{t_x, t_y, t_z\}^T$ y a unas fuerzas por unidad de volumen $\{X\} = \{X_x, X_y, X_z\}^T$ (las fuerzas por unidad de superficie podrían ser presiones y el peso propio sería una fuerza por unidad de volumen). El vector de desplazamientos queda denotado por $\{u\} = \{u, v, w\}^T$. Las deformaciones correspondientes a estos desplazamientos son

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

y las tensiones debidas a estas deformaciones serán

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

Las ecuaciones de equilibrio para un elemento diferencial pueden escribirse de la forma

$$\nabla\{\sigma\} + \{X\} = 0$$

donde el vector $\{X\}$ incluye de forma general las fuerzas de inercia $\{X\} = \{X\} - \rho\ddot{u}$, es decir, las fuerzas de inercia son consideradas como fuerzas por unidad de volumen. Multiplicando esta ecuación por una función de ponderación $\{\delta u\}$ e integrando

$$\int \{\delta u\}^T \nabla\{\sigma\} dv + \int \{\delta u\}^T X dv = 0$$

utilizando la fórmula de Green¹ se puede escribir

$$-\int_v \nabla\{\delta u\}^T \{\sigma\} dv + \int_s \{\delta u\}^T \{\sigma\} \bar{n} ds + \int_v \{\delta u\}^T X dv = 0 \quad (5.1)$$

¹La fórmula de Green se obtiene a partir de la relación $\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a$ y del teorema de la divergencia ($\int_v \nabla a dv = \int_s a \bar{n} ds$), que nos permite escribir $\int_v a \nabla b = \int_s a b \bar{n} ds - \int_v b \nabla a dv$

Si se asocia la función de ponderación $\{\delta u\}$ con un desplazamiento virtual, el operador ∇ actuando sobre él será una deformación virtual.

$$\{\delta \varepsilon\} = \nabla\{\delta u\}$$

El equilibrio en el contorno exige que se cumpla la relación $\{\sigma\} \cdot \{n\} = \{t\}$ y sustituyendo en la expresión (5.1)

$$-\int_v \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dv + \int_s \{\delta u\}^T \{t\} ds + \int_v \{\delta u\}^T X dv = 0 \quad (5.2)$$

En la relación anterior es posible introducir la ley de comportamiento de material mediante la matriz elástica con las propiedades de éste, $[C]$, de forma que

$$\{\sigma\} = [C](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}_0) + \{\sigma\}_0 \quad (5.3)$$

siendo los vectores $\{\varepsilon\}_0^T$ y $\{\sigma\}_0^T$ las deformaciones y las tensiones iniciales respectivamente. Introduciendo la expresión (5.3) y suponiendo deformaciones y tensiones iniciales nulas, en la ecuación (5.2) se obtiene

$$-\int_v \{\delta \varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dv + \int_s \{\delta u\}^T \{t\} ds + \int_v \{\delta u\}^T (\{X\} - \rho \ddot{u}) dv = 0 \quad (5.4)$$

que constituye la formulación del PTV y relaciona el sistema de cargas real y esfuerzos con el virtual de desplazamientos. [5]

5.4.2 Funciones de interpolación.

Discretizado el continuo, el objetivo es tomar un conjunto de funciones de interpolación que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro del elemento en función de los desplazamientos en los nodos del mismo, es decir:

$$\{u(x, y, z)\} = [N(x, y, z)]\{U\}$$

siendo $\{U\}$ el vector con los desplazamientos nodales. Una vez conocidos los desplazamientos en todos los nodos se determinan las deformaciones

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\}$$

donde $[D]$ es el operador diferencial que depende del problema de estudio. Sustituyendo el valor del desplazamiento resulta

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{U\} = [B]\{U\}$$

de donde se obtiene el valor de las deformaciones en función de los desplazamientos nodales.

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión del PTV (4.4) se consigue

$$-\int_v [B]^T [C][B]\{U\} dv + \int_s [N]^T \{t\} ds + \int_v [N]^T (\{X\} - \rho[N]\{\ddot{U}\}) dv = 0$$

Reordenando esta ecuación es posible llegar a un sistema de la forma

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{P\}$$

donde se definen

- Matriz de masa consistente

$$[M] = \int_v [N]^T \rho [N] dv$$

- Matriz de rigidez

$$[K] = \int_v [B]^T [C][B] dv$$

- Matriz de cargas nodales consistentes

$$\{P\} = \int_v [N]^T \{X\} dv + \int_s [N]^T \{t\} ds$$

La matriz anterior es general y permite determinar las matrices elementales para cualquier tipo de discretización. [4]

5.4.3 Síntesis de las características globales.

Las anteriores matrices se calculan para cada uno de los elementos. Realizando una transformación de coordenadas a las denominadas coordenadas unitarias de cada elemento, las matrices quedan en función de parámetros puramente geométricos y se facilita la integración numérica. Antes de proceder al ensamblaje de todas las ecuaciones se debe realizar la transformación inversa a coordenadas globales con objeto de disponer de todas las matrices formuladas respecto al mismo sistema de coordenadas.

Una vez que se dispone de las matrices y vectores elementales en coordenadas globales su acoplamiento en el sistema puede realizarse según el llamado método directo, por el que se suma en cada posición nodal la contribución realizada por los distintos elementos. [4]

5.4.4 Imposición de condiciones de contorno. Solución.

Previamente a la obtención de la solución del sistema de ecuaciones planteado es necesario imponer los desplazamientos nodales que sean conocidos. El sistema resultante se puede dividir en dos términos: uno que contenga los desplazamientos impuestos y otro los incógnita. Resolviendo este sistema se obtendrán dichos desplazamientos incógnita, a partir de los cuales es posible calcular tensiones y deformaciones. [4]

5.5 Tipos de elementos finitos.

A continuación se describen algunas de las características más importantes de los elementos finitos más utilizados: elemento barra, elemento viga, elemento triangular, elemento cuadrilátero, elemento rectangular, elemento hexaédrico, elemento de bordes curvos y elemento axilsimétrico. Los programas comerciales de elementos finitos poseen una gran cantidad de elementos en sus librerías sin embargo, la mayoría de las estructuras y aplicaciones mecánicas pueden ser solucionadas con los elementos básicos que a continuación se mencionarán.

Dependiendo de la dimensión, los elementos básicos se pueden dividir en tres categorías: elemento de línea, elemento de área y elementos de volumen. Los elementos barra y viga son elementos de línea, los elementos triangulares, cuadriláteros y axilsimétricos son elementos de área y los elementos hexaédricos y tetraédricos son elementos de volumen. [13]

5.5.1 Elemento barra.

El elemento barra está caracterizado básicamente porque sólo puede comportarse como un miembro sometido a dos fuerzas a lo largo del eje longitudinal del elemento. Una estructura se puede modelar con elementos barra si cumple las siguientes condiciones:

- a. Su longitud es mucho mayor que su ancho (entre 8 y 10 veces)
- b. Las distintas barras de la estructura están conectadas entre sí con pasadores que no transfieren momentos.
- c. Las cargas externas solo son aplicadas en el extremo común de varios elementos y se reparten paralelamente a los mismos (como carga axial).

Así, los elementos barra solo pueden ser sometidos a tracción o compresión, con lo que sólo se debe especificar el área axial del elemento. La figura 68 muestra la

geometría de un elemento barra tridimensional, que posee tres grados de libertad por nodo: los desplazamientos sobre los ejes globales X, Y y Z. [13]

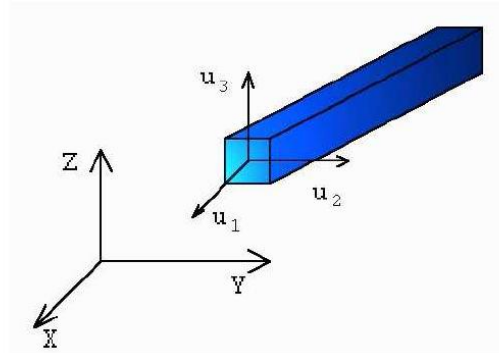


Figura 68. Elemento barra tridimensional

5.5.2 Elemento viga.

El elemento viga es uno de los más usados. Además de sus aplicaciones obvias en estructuras, muchos otros sistemas, como uniones mecánicas, sistemas de conductos, tuberías y vigas en puentes, pueden ser modelados con este elemento.

Para que una determinada parte estructural sea modelada con elementos viga, una de sus dimensiones debe ser mucho mayor (por lo menos 10 veces) que las otras dos. Al contrario de lo que ocurría en el elemento barra, el elemento viga puede estar sometido a cargas transversales y/o momentos flectores además de a las cargas de tracción y compresión

La geometría y los grados de libertad de este tipo de elemento, considerándolo tridimensional, se muestran en la figura 69. Nótese que el elemento viga tridimensional posee seis grados de libertad por nodo: el desplazamiento y el giro en cada uno de los tres ejes. [13]

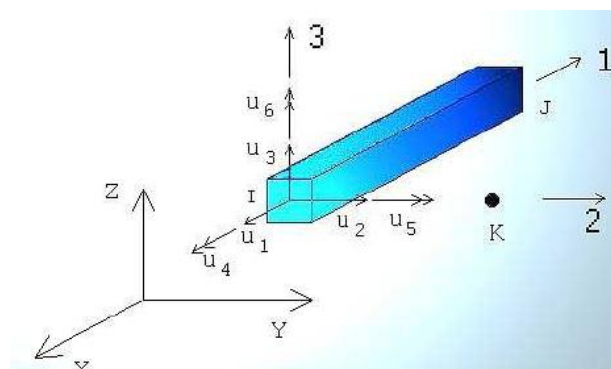


Figura 69. Elemento viga tridimensional

5.5.3 Elementos planos triangular y cuadrilátero.

Para el caso del análisis plano existen principalmente dos tipos de elemento: el triangular y el cuadrilátero (ver figura 70). [13] El elemento triangular es el elemento finito por excelencia. Es un comodín, ya que con él se puede aproximar cualquier forma estructural continua, plana o espacial, en forma de lámina o con bordes curvos, siempre que se disminuya de manera adecuada el tamaño de los mismos y, en consecuencia, se aumente su número en la discretización de la estructura continua. Aunque actualmente ya existen otros elementos más complejos que hacen frente a tales necesidades, el conocimiento de sus propiedades es fundamental para el estudio de elementos con caras curvas. [14]

El elemento cuadrilátero es de fácil manejo matemático por estar generado por la superposición de triángulos. [14] Como regla general, se prefieren los elementos cuadriláteros por razones de isotropía geométrica aunque, como ya se ha dicho, es interesante el uso de triángulos cuando se presentan irregularidades en la geometría del elemento a modelar, como se muestra en la figura 71. [13]

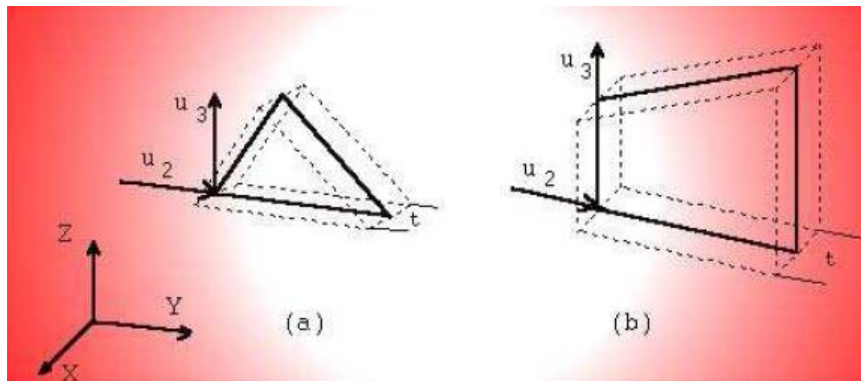


Figura 70. Elemento plano triangular (a) y cuadrilátero (b)

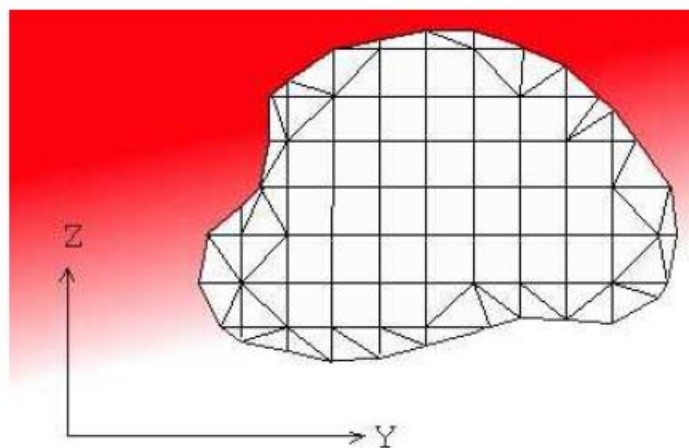


Figura 71. Combinación de elementos triangulares y cuadriláteros

5.5.4 Elemento plano rectangular.

El elemento rectangular (figura 72) es muy útil por su facilidad computacional cuando sus lados son paralelos a los ejes de coordenadas globales y la estructura no tiene bordes curvos. Este elemento tiene gran importancia en el estudio de la flexión de placas delgadas y para el estudio de elementos hexaédricos con caras curvas.



Figura 72. Elemento plano rectangular

Es de fácil generación y, en algunos casos, aproxima bien la forma del sólido en estudio. [14]

5.5.5 Elementos tetraédricos.

Este tipo de elementos, representado en la figura 73 es empleado en el análisis de problemas de elasticidad tridimensional, en particular para el estudio tensional de placas de gran espesor. Se trata de una generalización tridimensional del elemento triangular y, por este motivo, tienen en el espacio la adaptabilidad que tiene aquel en el plano. [14]

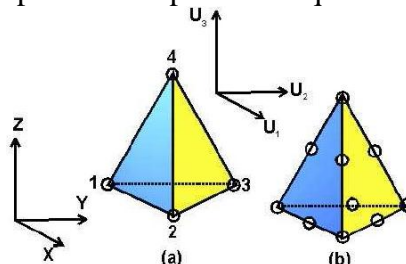


Figura 73. Tetraedro de cuatro (a) y de diez (b) nodos

5.5.6 Elementos hexaédricos.

Este tipo de elemento (figura 74) se utiliza en el análisis de problemas de elasticidad tridimensional. Son empleados, principalmente, para el estudio de problemas de elasticidad espacial y de placas gruesas sometidas a cargas transversales. [14]

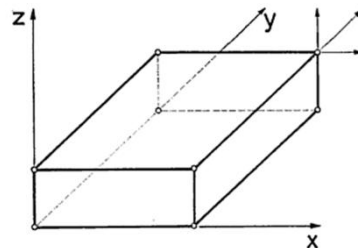


Figura 74. Elemento hexaédrico

5.5.7 Elementos con bordes curvos.

Los elementos de bordes curvos o distorsionados son específicamente útiles para ser adaptados a estructuras continuas con perímetros no rectos. Para su estudio, son considerados como elementos transformados de otros elementos padre: lineal, triángulo, cuadrado y cubo. Pueden ser planos o espaciales. (ver figura 75) [14]

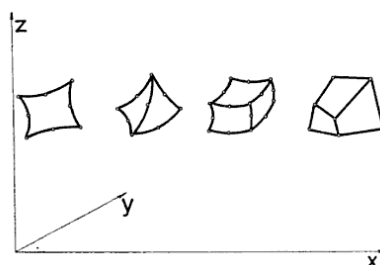


Figura 75. Elementos con bordes curvos

5.5.8 Elementos axilsimétricos.

Tanques de acero y hormigón, rotores, toberas y contenedores son algunos ejemplos representativos de estructuras axilsimétricas. De forma similar a las estructuras tridimensionales que están bajo condición de esfuerzo plano o deformación plana, las estructuras axilsimétricas sometidas a cargas, también axilsimétricas, pueden ser analizadas en un modelo bidimensional. [13] Estos elementos tienen gran interés práctico para el estudio de estructuras resistentes con ejes de simetría (depósitos), estructuras de láminas delgadas, etc., por la posibilidad de simplificación de la formulación que presentan. [14]

Por ejemplo, para analizar una estructura axilsimétrica, como puede ser un cilindro de pared delgada t , aplicándosele una presión constante p , el modelo es la intersección del cilindro con el plano YZ , tal y como se muestra en la figura 76 [13]

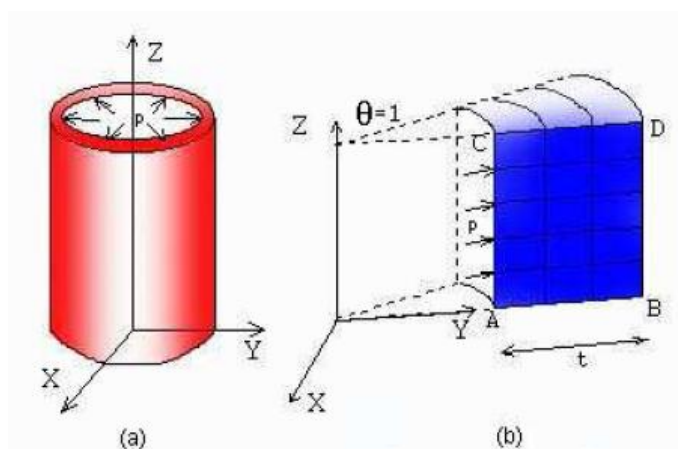


Figura 76. a) Cilindro bajo presión externa. b) Modelo axilsimétrico

Capítulo 6

Modelo de elementos finitos de la grúa torre Potain MCT 88.

6.1 Introducción.

ANSYS Inc. (Swanson Analysis Systems, Inc.), fundada en 1970, desarrolla y presta soporte a la ingeniería introduciendo nuevos métodos para conseguir productos y procesos de fabricación más innovadores con programas de elementos finitos destinados a la simulación, que predicen cómo funcionará y reaccionará un determinado producto bajo un entorno real. [17]

ANSYS es un programa de elementos finitos que originariamente ofrece soluciones para resolver análisis estático-lineales. Sucesivamente se han ido introduciendo módulos con los que este programa es capaz de resolver problemas dinámicos no lineales, los cuales no han sido utilizados en el desarrollo del presente proyecto. [17]

En este capítulo se describirá el proceso de modelización y análisis de resultados estructurales y modales de la estructura de una grúa torre Potain modelo MCT 88 (En la configuración de altura de 53.05m y flecha de 52 m) en diferentes estados y bajo la condición de carga máxima (ver figuras 77 y 78), utilizando la técnica de elementos finitos. Para ello se ha utilizado el software ANSYS 12.0 [ANSYS 2009]. Es importante

destacar que este modelo, a diferencia de la gran mayoría de grúas torre, no tiene los característicos tirantes que van desde la flecha y la contraflecha hasta el castillete.

El interfaz de ANSYS agrupa los comandos de interés en tres grandes bloques: preprocesado, solución y postprocesado. En el preprocesado se establecen las características físicas y geométricas del modelo, siendo la fase que más tiempo requiere del análisis. En la fase de solución, se aplica el sistema de cargas al modelo y se eligen los parámetros de solución del sistema de ecuaciones que genera el problema. Finalmente, en la fase de postprocesado se obtienen los resultados del análisis y se presentan de múltiples formas: gráficas, animaciones, listas de datos, etc., pudiéndose así obtener las conclusiones que procedan. [18]



Figura 77. Grúas Potain MCT 88 en distintas configuraciones.

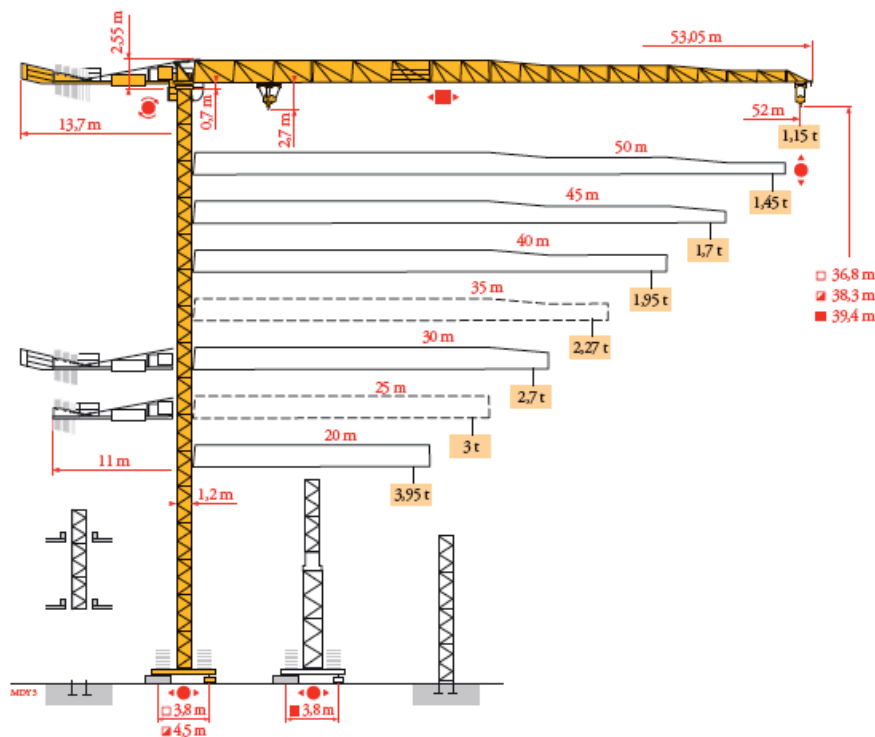


Figura 78. Posibles configuraciones de la grúa Potain MCT 88.

6.2 Modelización con elementos viga BEAM44.

En el comienzo del desarrollo del presente proyecto se decidió llevar a cabo una modelización con elementos viga al objeto de analizar los resultados que se obtuviesen y decidir si se debía realizar un análisis más profundo con otro tipo de elementos tales como elemento placa o elemento sólido tridimensional.

Como se explica en el apartado 5.5.2, este tipo de elemento es muy utilizado en el cálculo de estructuras y admite cargas de tracción y compresión, así como momentos flectores. Por ello su utilización se considera idónea para el primer análisis a realizar.

A continuación se muestra el proceso de la modelización y análisis de resultados con el tipo de elemento antes mencionado.

6.2.1 Preprocesado.

La fase de preprocesado es, como ya se ha comentado, la que requiere una mayor cantidad de tiempo. Esta fase se divide en varias subfases:

- Definición del tipo de análisis
- Definición del tipo de elemento finito a utilizar
- Definición del modelo de material
- Generación de la geometría del modelo
- Mallado del modelo y definición de las propiedades del elemento seleccionado

La elección del tipo de análisis está condicionada por las condiciones de carga aplicadas al modelo y por los resultados que se pretenden obtener.

Respecto a la definición del tipo de elemento, ANSYS ofrece una gran cantidad de clases diferentes dentro de los elementos tipo viga (o ‘beam’). La elección del tipo de elemento determina, entre otros factores, los grados de libertad implicados en el análisis y el espacio dimensional en que se construye el modelo; también condiciona la naturaleza de los resultados obtenidos y el método de cálculo de los mismos. [18]

Relativo al modelo de material utilizado, la mayoría de los tipos de elementos requieren propiedades del material. Estas propiedades pueden ser lineales o no lineales y, dentro de un mismo análisis, se pueden utilizar múltiples conjuntos de propiedades de material, que corresponden al número de materiales diferentes presentes en el modelo,

definiendo aspectos como la elasticidad, el módulo de Young o el coeficiente de Poisson del material. [2]

Una vez elegido el tipo de elementos a utilizar en el modelo, se debe definir la geometría de la sección transversal de cada una de las secciones que componen la estructura de la grúa. Esto se puede llevar a cabo mediante la opción de creación de secciones que ofrece el programa ANSYS o definiendo las propiedades de cada una de ellas. [2]

Dentro del preprocesado, la subfase correspondiente a la creación de la geometría es la más extensa. En ella se define la geometría del modelo, a la que se asocia el material, la sección transversal correspondiente y el tipo de elemento escogido. Finalmente se procede al mallado, que divide la geometría en elementos. [18]

6.2.1.1 Definición del tipo de análisis.

El tipo de análisis que se utilizará en este caso será el estático (ver figura 79), para la determinación de los desplazamientos, deformaciones y tensiones en la estructura de la grúa.

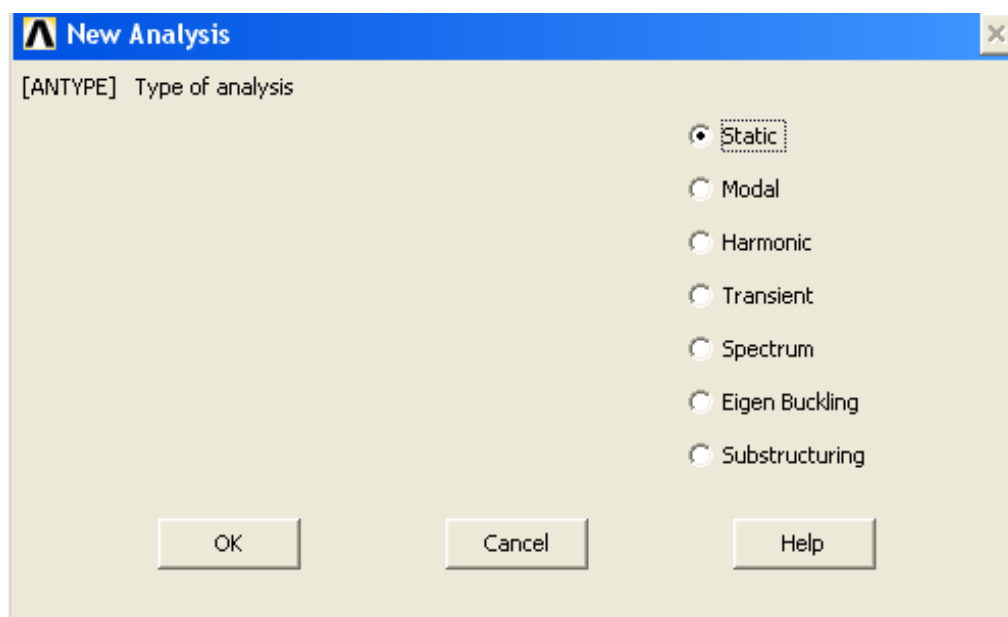


Figura 79. Selección del tipo de análisis.

6.2.1.2 Definición del tipo de elemento finito a utilizar.

Como elemento finito se ha escogido el elemento tipo viga, BEAM44. Éste es un elemento uniaxial con capacidades de tracción, compresión torsión y flexión que tiene seis grados de libertad en cada nodo correspondientes a los desplazamientos en las tres direcciones del espacio (x , y y z) y a las rotaciones sobre cada uno de esos ejes, tal y como se muestra en la figura 80. Su sistema de referencia está definido por tres nodos

(i, j, k) o por dos nodos (i, j) y un ángulo de orientación. [19] Por tanto, el nodo de referencia k es un nodo de orientación.

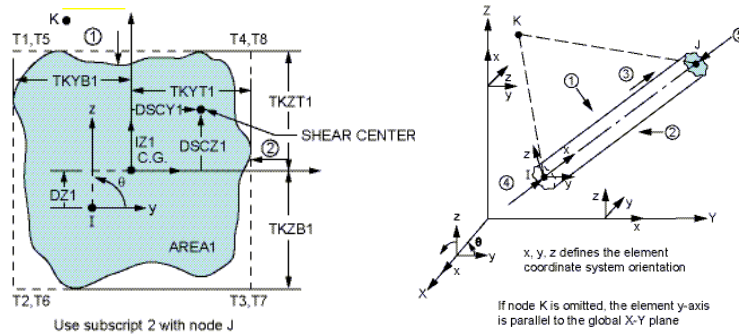


Figura 80. Elemento BEAM44.

En la herramienta ANSYS, el proceso de selección del tipo de elemento se muestra en la figura 81.

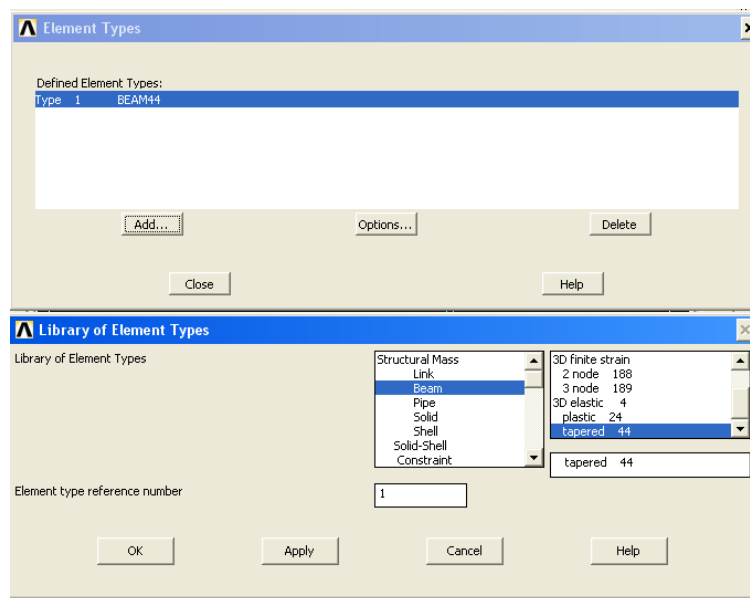


Figura 81. Selección de elemento BEAM44 en ANSYS.

6.2.1.3 Definición del modelo de material.

El material utilizado en la construcción de las estructuras de la grúa torre que se estudia es acero S355 JO, según norma EN10025(93), cuyas propiedades mecánicas son:

- Módulo de elasticidad: 210 GPa
- Coeficiente de Poisson: 0,3
- Límite elástico: 355 MPa

- Tensión máxima: 470 MPa
- Densidad: 7850 kg/m³

En la figura 82 se muestra la elección de las características del modelo de material en ANSYS.

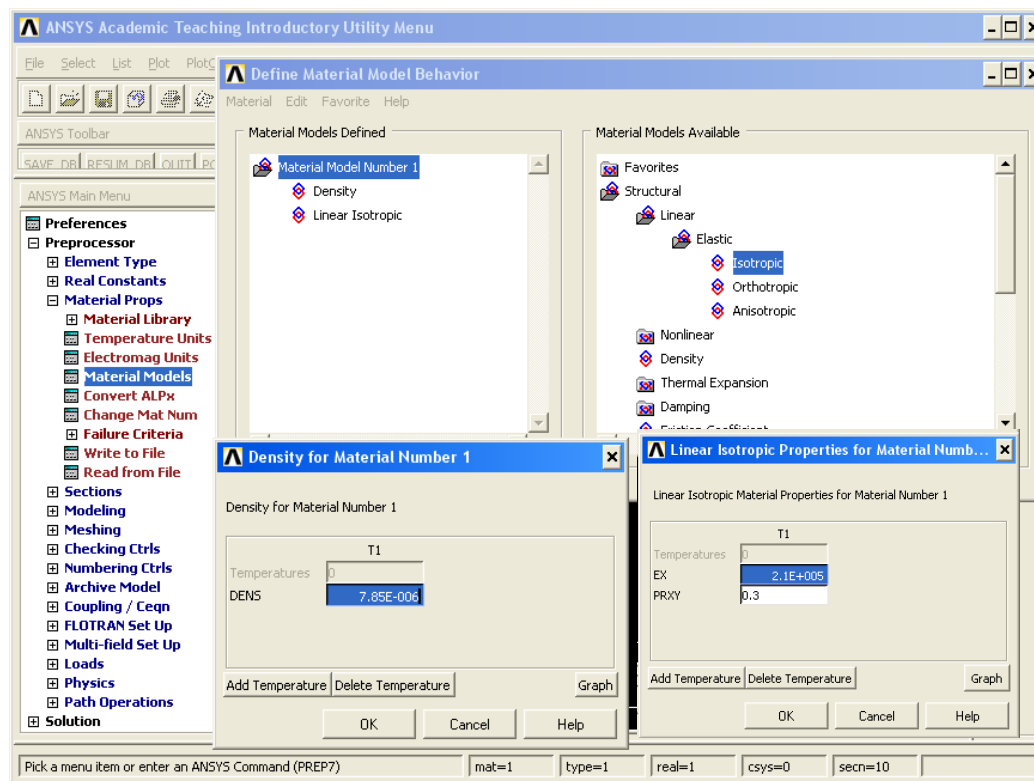


Figura 82. Selección de las características del material en ANSYS.

6.2.1.4 Generación de la geometría del modelo.

La geometría de la estructura de la grúa se ha generado utilizando puntos (*keypoints*) y líneas. En esta sección, con objeto de simplificar la modelización, se ha considerado que las vigas son los únicos elementos estructurales que definen el modelo de la grúa.

Existen una serie de vigas en la estructura que están unidas entre sí a través de una soldadura. Cabe destacar que, mediante el elemento BEAM44, únicamente se pueden unir vigas cuyos ejes longitudinales intersequen entre sí. Para ello, el punto en el que las vigas se unen debe ser común a ambas.

En estas uniones soldadas, también es importante el hecho de que los puntos que son comunes a dos perfiles distintos que intersecan deben de ser el centro de gravedad de ambos perfiles, ya que de lo contrario, durante el mallado se alterarían las medidas originales de la grúa.

En la figura 83 puede observarse la geometría generada a partir líneas y puntos y en la figura 84 un detalle de la zona de unión de la torre, flecha y contraflecha.

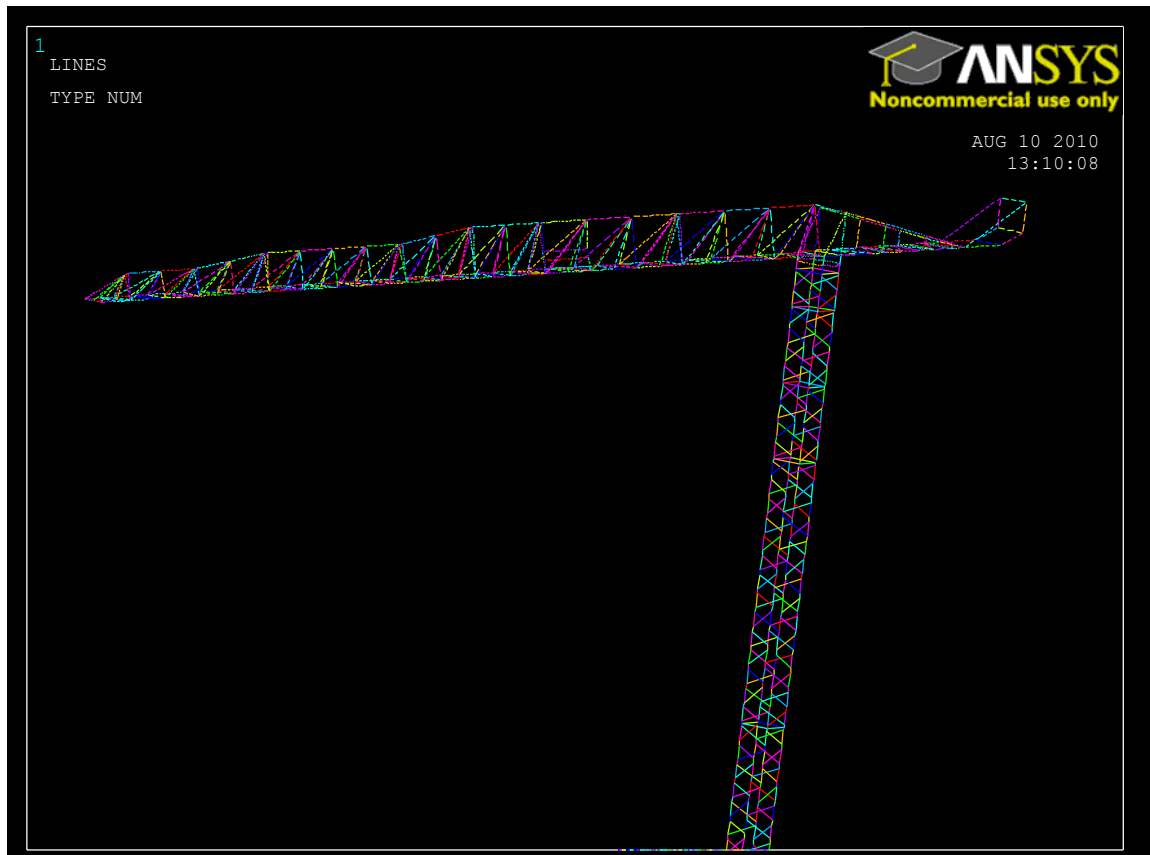


Figura 83. Geometría generada a partir de líneas y puntos.

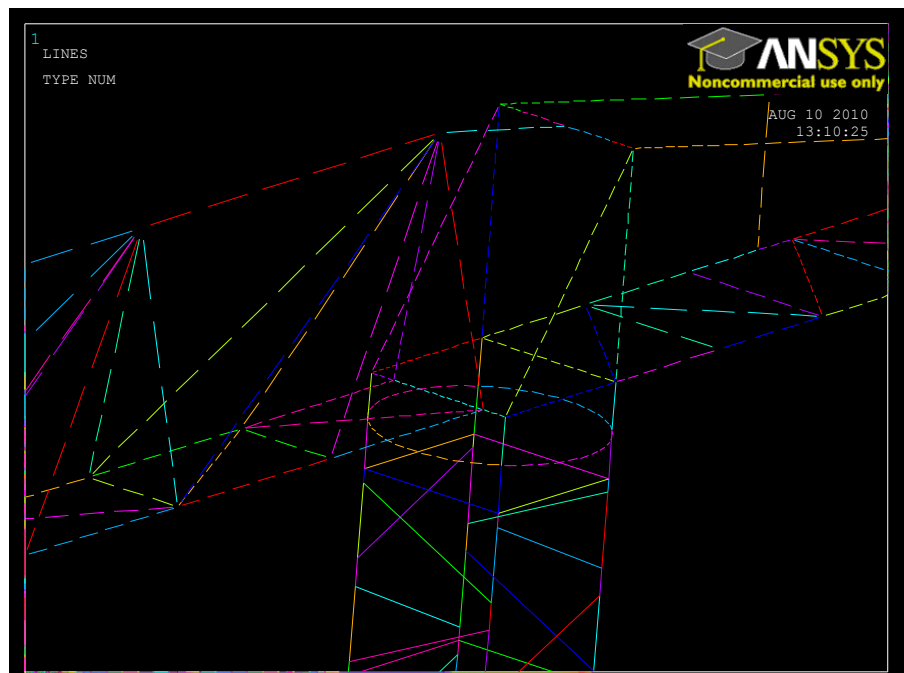


Figura 84. Detalle de la zona de unión de torre, flecha y contraflecha.

6.2.1.5 Mallado del modelo y definición de las propiedades del elemento seleccionado.

Antes del mallado se deben definir las secciones transversales de cada una de las vigas de la estructura y, posteriormente, se adjudica cada sección con su correspondiente viga a través del cuadro de selección de atributos de la viga (ver figura 85). La definición de las secciones con la herramienta (*Beam Tool*, ver figura 86) de ANSYS de creación de las mismas, hace que no se deba asignar ningún conjunto de constantes reales al elemento BEAM44. En caso de que se decidiese asignar un conjunto de constantes reales y una sección, aquel tendría siempre prioridad sobre la sección asignada.

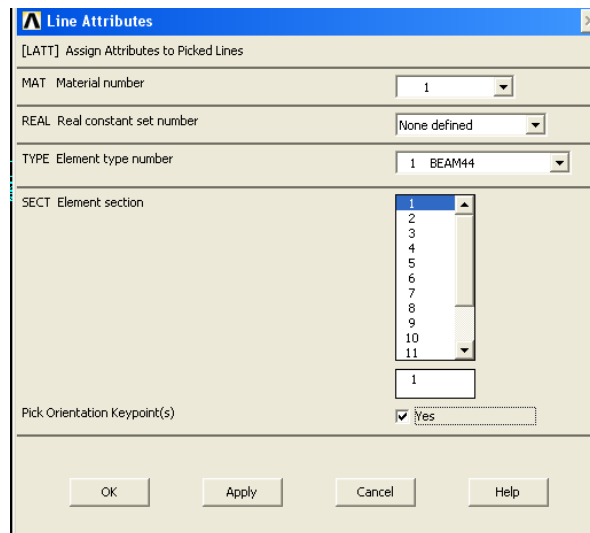


Figura 85. Cuadro de selección de atributos de la viga.

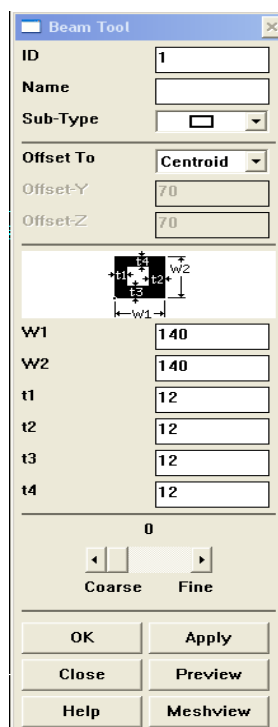


Figura 86. Beam Tool.

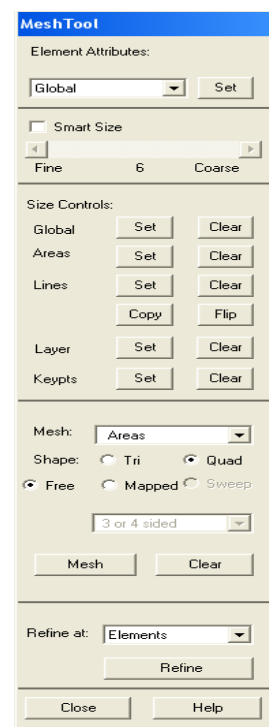


Figura 87. Mesh Tool.

Por otro lado, es preciso definir la orientación de los perfiles a través de una serie de puntos (*orientation keypoints*, ver figura 85) que deben colocarse lo suficientemente lejos de la estructura (entre 20 y 30 veces la altura de la misma) con el objeto de que toda recta trazada desde el *keypoint* de orientación hasta cualquier línea de la grúa sea ortogonal a esta última. De este modo, será suficiente la utilización de seis *keypoints* de orientación (dos para cada sentido de cada uno de los tres ejes) para la colocación de todos los perfiles.

Una vez se encuentran definidos los atributos de cada una de las vigas de la grúa se procede al mallado a través de la herramienta dispuesta para ello (*Mesh Tool*, ver figura 87). Esta herramienta, además de mallar el modelo, permite asignar atributos a las vigas en caso de que no se haya hecho previamente con el cuadro de selección de los mismos y definir el tamaño o número de elementos que se desean en cada viga.

Por último, el elemento BEAM44 permite, mediante el comando /ESHAPE o el cuadro *size and shape* (ver figura 88) visualizar, únicamente en la fase de preprocesado, los elementos del modelo como sólidos, y no como líneas, tal y como se muestra en la figura 89 y 90. Con ello, se facilita la comprobación de la correcta orientación de la sección de las vigas.

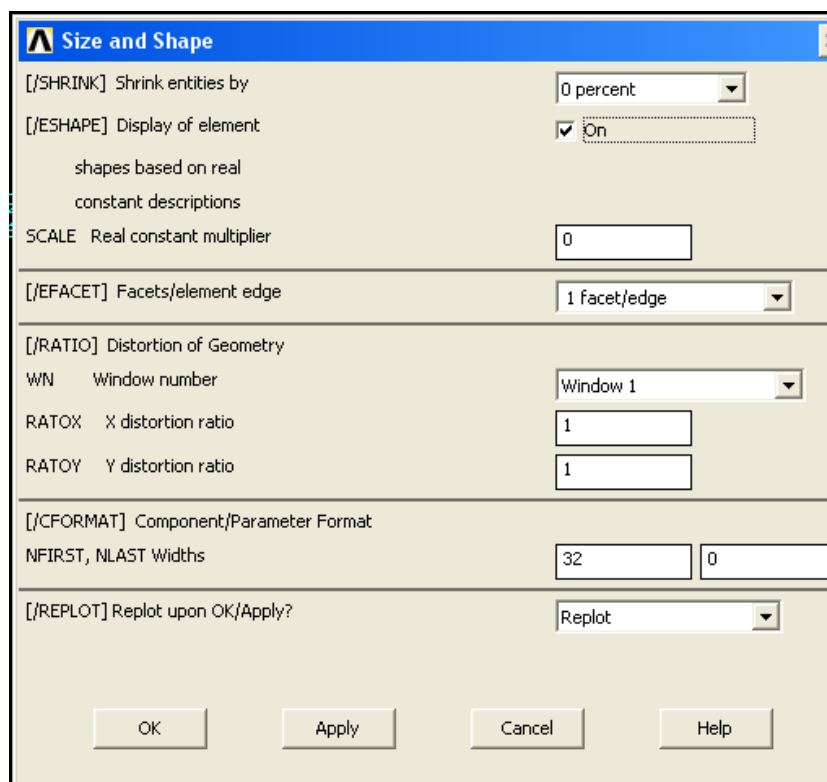


Figura 88. Cuadro *size and shape*.

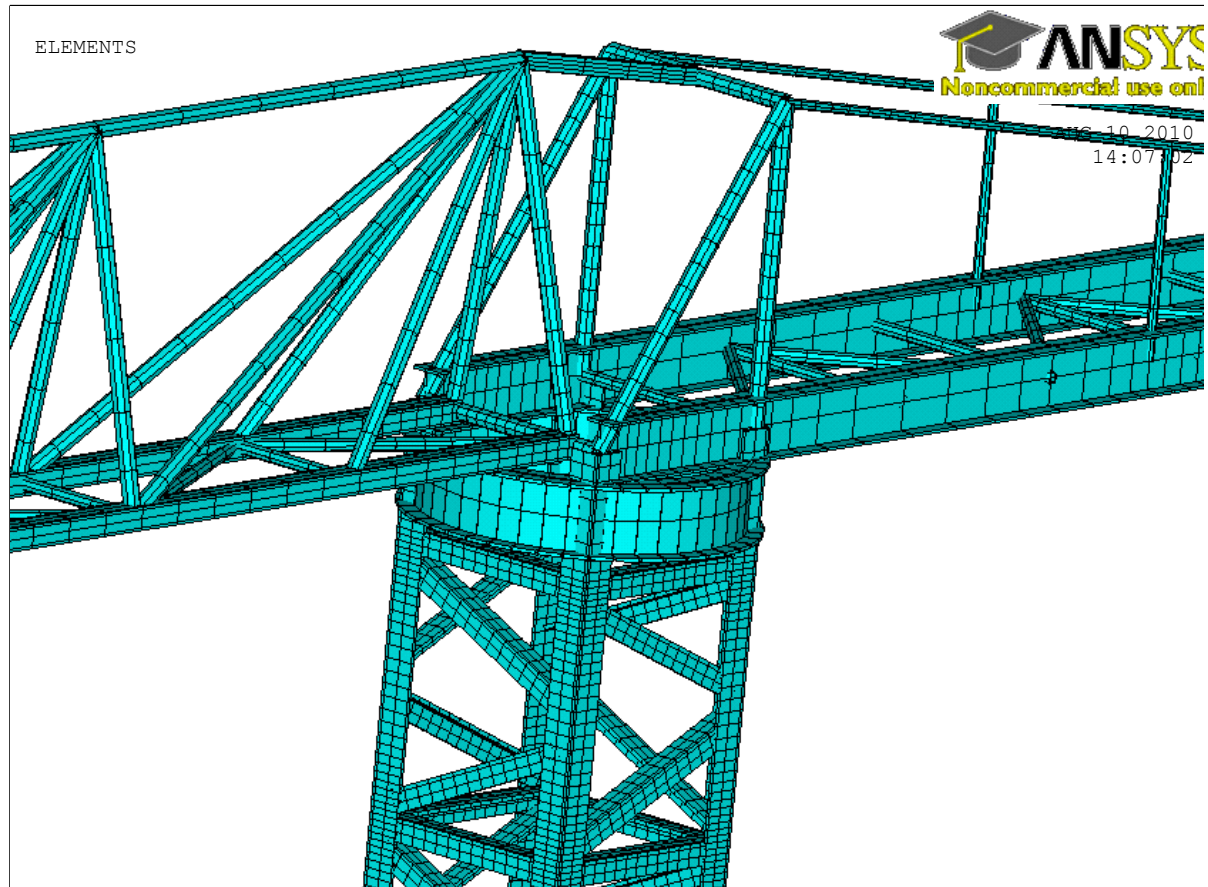


Figura 89. Geometría de la zona de unión de torre, flecha y contraflecha aplicando el comando ESHAPE.

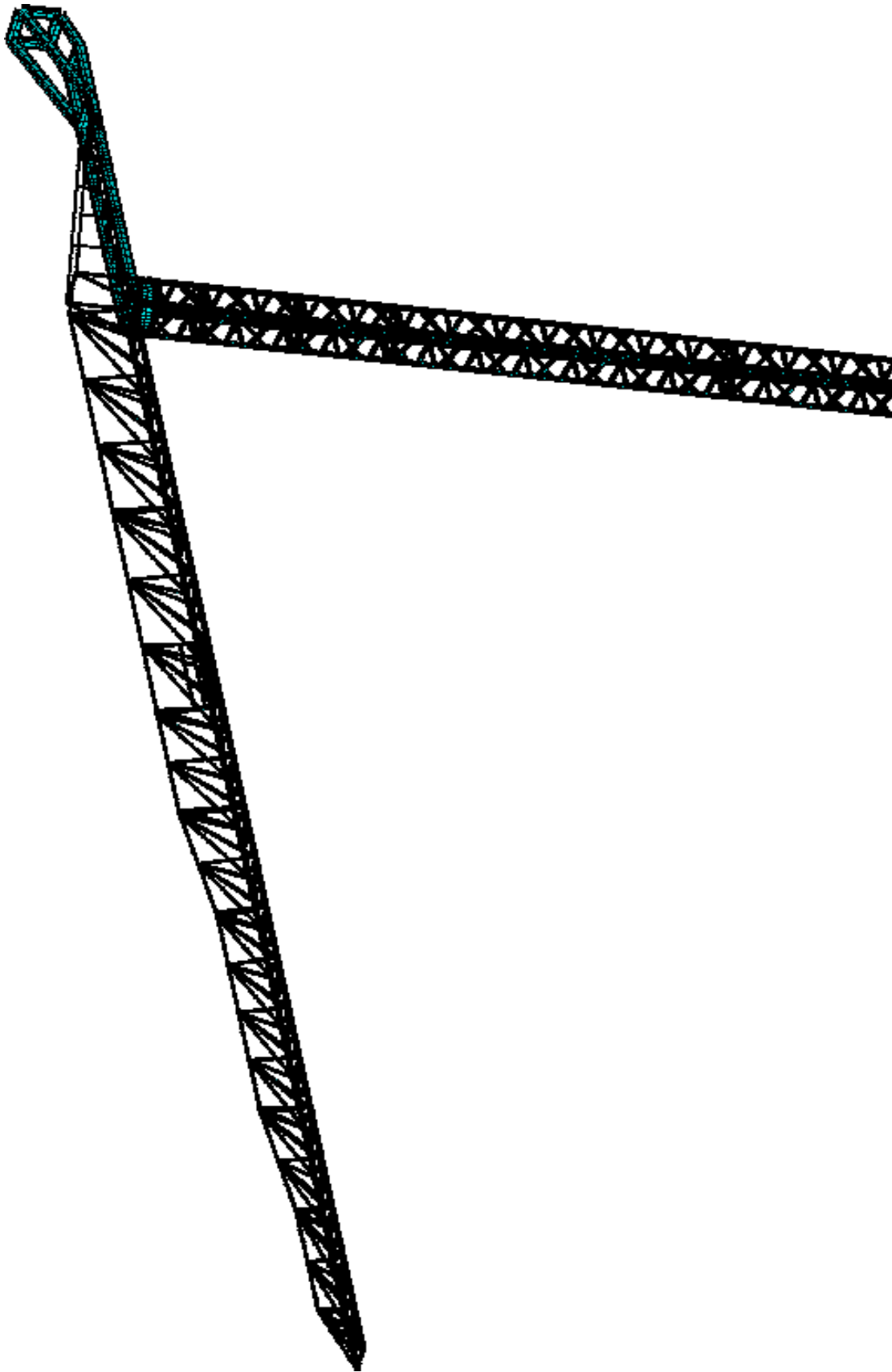


Figura 90. Geometría de la grúa aplicando el comando ESHAPE.

6.2.2 Solución.

La fase de solución se divide en dos subfases:

1. Aplicación de cargas.
2. Solución.

La aplicación de cargas no sólo está referida a la aplicación de las fuerzas externas, sino también a la de los desplazamientos y condiciones de contorno que hacen que el sistema de fuerzas al que está sometido el modelo de elementos finitos se aproxime lo más posible al sistema de fuerzas existentes en la realidad.

En el caso de la grúa torre, se han anulado los desplazamientos, que no los giros, en la base de la torre y se han aplicado, como primer análisis, las cargas generadas por la masa máxima que la grúa puede levantar (1,15 tn), por la masa del contrapeso (13 tn) y por el peso propio de la estructura que, debido a la gran longitud de la flecha (o pluma) es de enorme importancia (ver figura 91), cuando la grúa se encuentra alineada con la torre, es decir, cuando no se encuentra girando.

Una vez realizadas las acciones precedentes, se ejecuta el comando de resolución del sistema de ecuaciones generado.

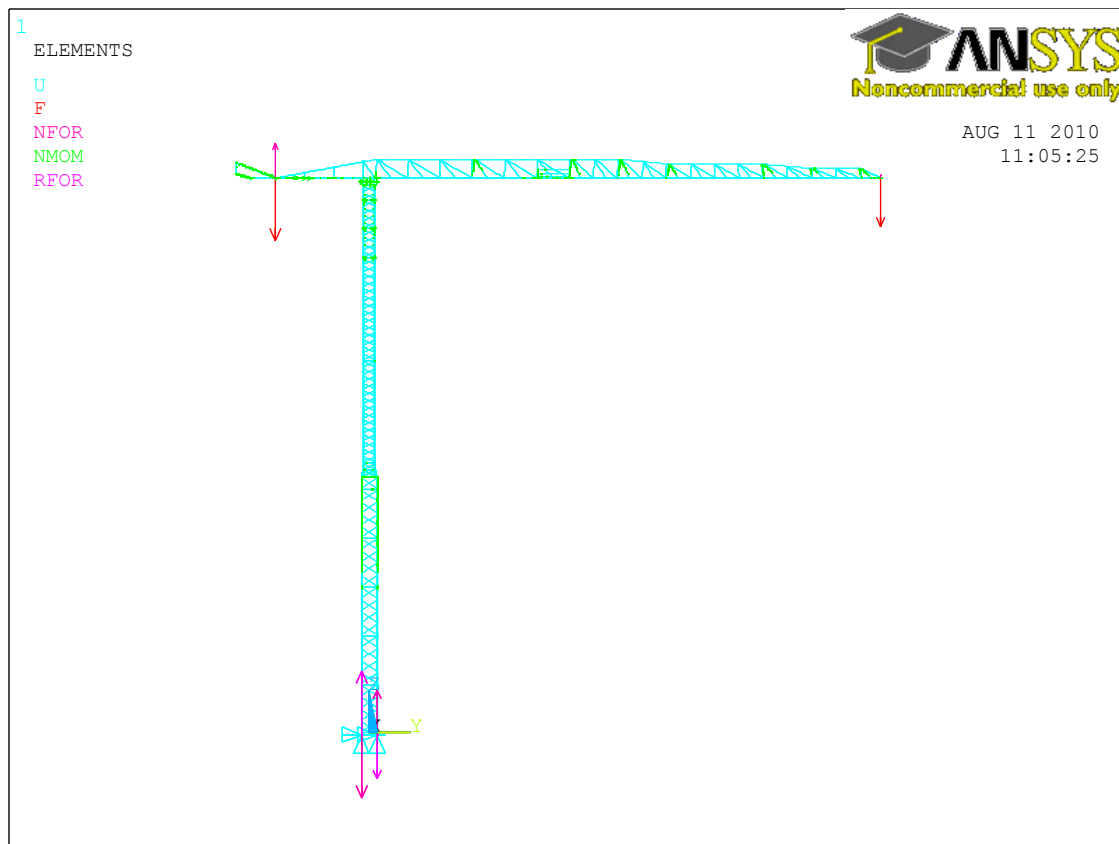


Figura 91. Aplicación de cargas a la grúa.

6.2.3 Postprocesado.

En el postprocesado se obtienen resultados gráficos y numéricos de la simulación realizada. De esta manera se comprueba que la estructura opera en régimen elástico, que los desplazamientos son pequeños y se hace un estudio tensional a través del que se detectan las zonas más solicitadas.

Con el elemento BEAM44, se debe tener en cuenta que la obtención de las tensiones no es directa. Para que el programa muestre las tensiones se debe generar, previamente, una tabla con los parámetros que se desean obtener (y que el elemento BEAM44 debe tener predeterminados). En el caso que se estudia, se decidió considerar los parámetros SMAX y SMIN, que dan los valores de máxima y mínima tensión, respectivamente, en un determinado nodo. Por ello, considerando que cada elemento tiene dos nodos, se obtendría, por cada elemento, cuatro datos: SMAXI, SMAXJ, SMINI, y SMINJ (ver figura 92). El mayor de esos cuatro valores en valor absoluto sería la tensión máxima a la que estaría sometido el elemento.

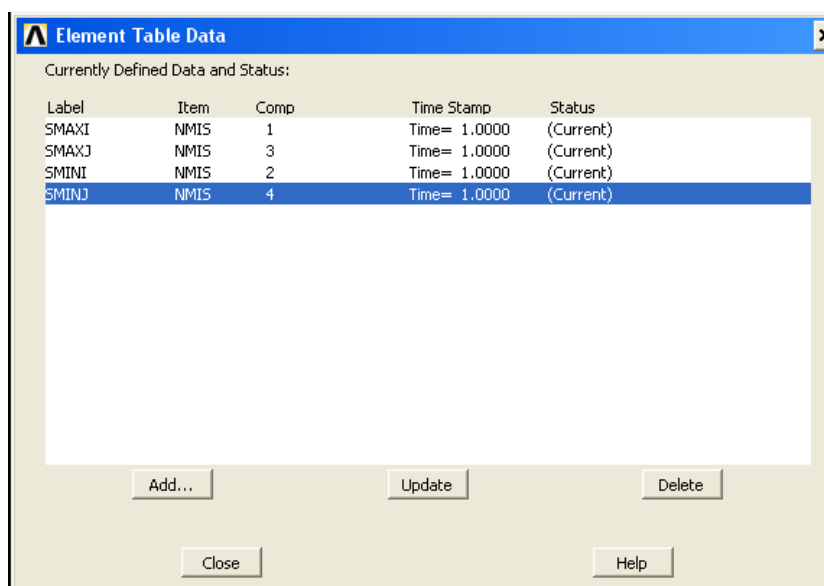


Figura 92. Definición de la tabla de datos a obtener.

6.2.4 Resultados.

En esta sección se muestran los resultados obtenidos mediante el método de los elementos finitos. Para ello se procede a realizar dos tipos de análisis: de la deformada y de las tensiones.

6.2.4.1 Análisis de la deformada.

En la figura 93 se observa la deformada que se genera, a una escala superior a la real.

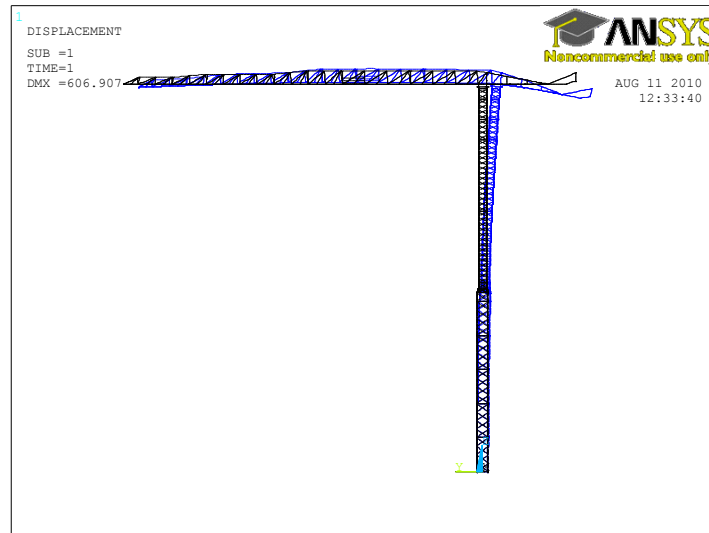


Figura 93. Deformada a escala incrementada

El desplazamiento máximo que se produce es de aproximadamente **607 mm**, por lo que se puede considerar aceptable frente a las dimensiones de la estructura, de **53.05 m**, siempre que no se supere el límite elástico de **355 MPa**.

6.2.4.2 Análisis de las tensiones.

En la figura 94, se observa el estado más crítico de tensiones que aparece sobre la grúa.

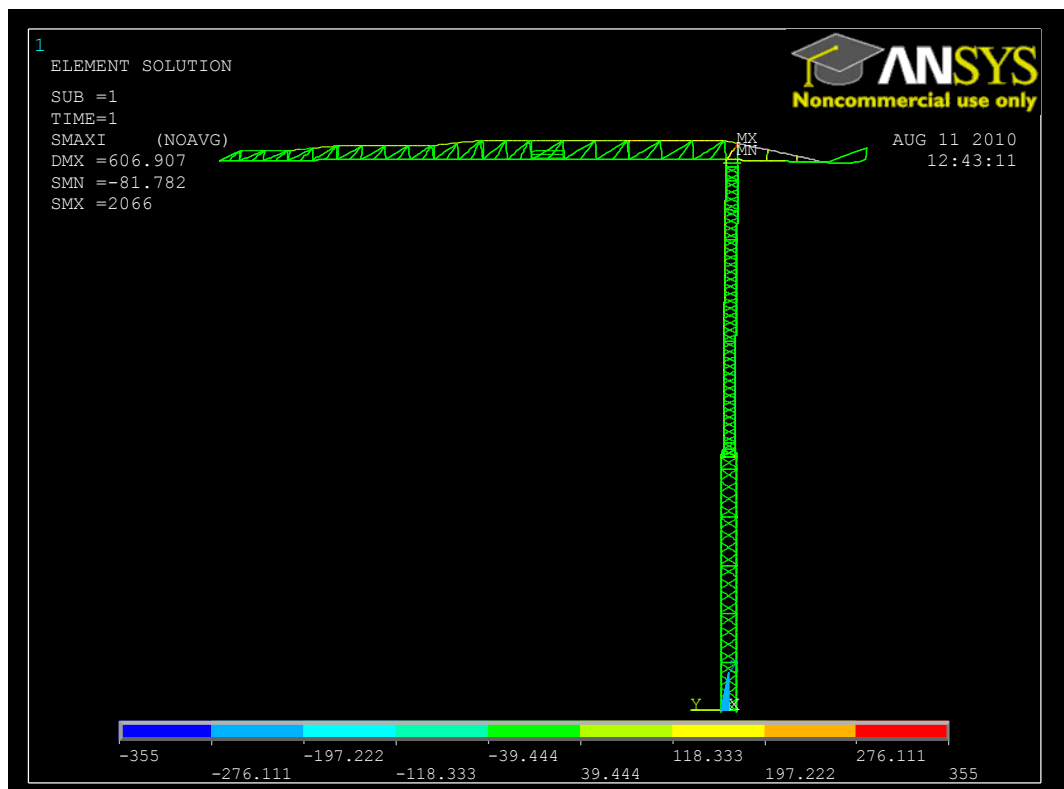


Figura 94. Estado tensional más crítico de la estructura

A nivel general, la distribución de tensiones es altamente uniforme y su valor se encuentra por debajo de **355 MPa** en toda la estructura. No obstante, tal y como se muestra en la figura 95, aparecen, en la zona de la unión de la torre, flecha y contraflecha, tensiones que superan el límite elástico (zonas marcadas en color gris) y que, incluso, llegan a elevarse por encima de los **2000 MPa**.

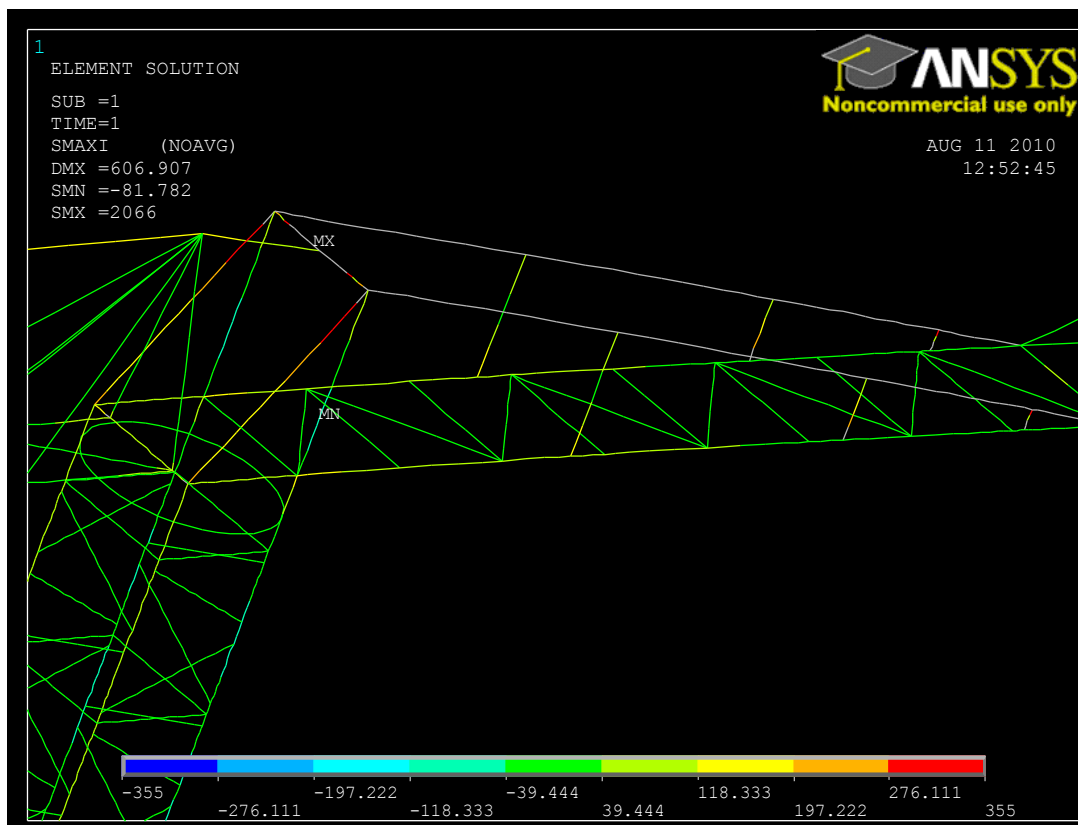


Figura 95. Estado tensional de la unión de la torre, flecha y contraflecha.

La barandilla que une la zona del contrapeso a la torre se encuentra altamente cargada, hasta el punto de superar el límite de rotura. Por todo ello, se puede concluir al llegar a este punto, que el modelo realizado exclusivamente con elementos BEAM44, debido a la excesiva simplificación respecto a la grúa real que conlleva (ver figura 96), no es válido por no ser representativo del estado tensional y de deformación real de la estructura bajo las condiciones de carga impuestas.



Figura 96. Grúa real: Unión de la torre, flecha y contraflecha.

6.3 Modelización con elementos viga BEAM44 y placa SHELL63.

De la solución del modelo del apartado anterior se deduce la necesidad de desarrollar un modelo más complejo de la zona de la unión de la torre, flecha y contraflecha.

Se realizará una modificación del modelo inicial, en dos fases. En primer lugar, se modelará con elemento SHELL63, las placas soporte a las que van unidas las barras de la flecha, torre y contra flecha (ver figura 97) y, posteriormente, si se considera necesario, se modelarán, también, los perfiles que unen ambas placas.

El elemento SHELL63, tal y como se explica en el apartado 5.5.3, es un elemento plano cuadrilátero, generado por la superposición de elementos planos triangulares. Dado que la geometría a modelizar no es excesivamente compleja y que el elemento plano cuadrilátero es de fácil manejo matemático, se ha considerado que es el idóneo para el análisis a realizar.



Figura 97. Grúa real: Zona a modificar en el modelo de elementos finitos.

6.3.1 Primera fase: Modelización de la placa.

6.3.1.1 Modificación de la geometría.

En este caso, como elemento finito se ha escogido, además de mantener el anterior elemento BEAM44, el elemento SHELL63 (ver figura 98). Éste elemento queda definido por cuatro nodos a los que hay que asignarles un espesor como conjunto de constantes reales (ver figura 99) y admite cargas tanto en su plano como normales a su plano. Cada uno de los nodos tiene seis grados de libertad: traslaciones en los tres ejes x , y y z ; y rotación alrededor de cada uno de ellos.

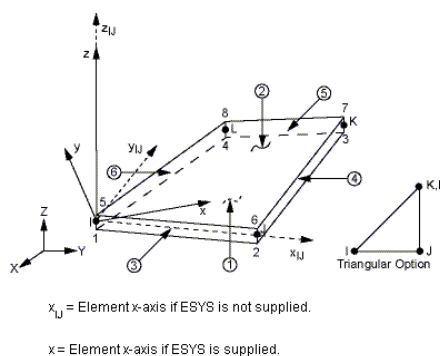


Figura 98. Elemento SHELL63

Real Constant Set Number 2, for SHELL63	
Element Type Reference No. 2	
Real Constant Set No.	2
Shell thickness at node I TK(I)	50
at node J TK(J)	50
at node K TK(K)	50
at node L TK(L)	50
Elastic foundation stiffness EFS	0
Element X-axis rotation THETA	0
Bending mom of inertia ratio RMI	0
Dist from mid surf to top CTOP	0
Dist from mid surf to bot CBOT	0
Added mass/unit area ADMSUA	0

OK Apply Cancel Help

Figura 99. Asignación de propiedades al elemento SHELL63

En cuanto a la selección del modelo de material, éste no varía respecto al utilizado en el apartado anterior: acero S355 JO.

Para la generación de la geometría de las placas se han utilizado puntos, líneas y áreas generadas a partir de dichas líneas.

De esta forma, tras el mallado, se obtiene la zona modificada que se muestra en la figura 100.

Por otra parte, el estado de cargas al que se encuentra sometida la estructura y la posición de la grúa, no varían respecto del modelo original, aunque las fuerzas generadas por la masa del contrapeso se aplicarán de manera repartida y no como fuerzas puntuales, a diferencia de cómo se realizó en el modelo constituido exclusivamente por elementos BEAM44

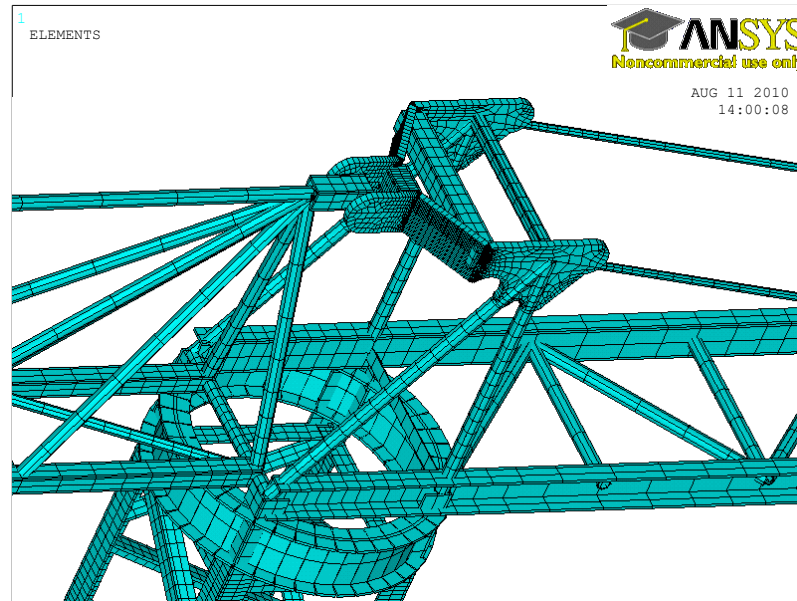


Figura 100. Modelo de elementos finitos con BEAM44 y SHELL63

6.3.1.2 Análisis de resultados.

En la figura 101 puede observarse la deformada del nuevo modelo, más equilibrada que en el caso anterior. Además, el desplazamiento máximo que se produce es de aproximadamente **475 mm**, lo que, en principio, puede ser considerado, de nuevo aceptable.

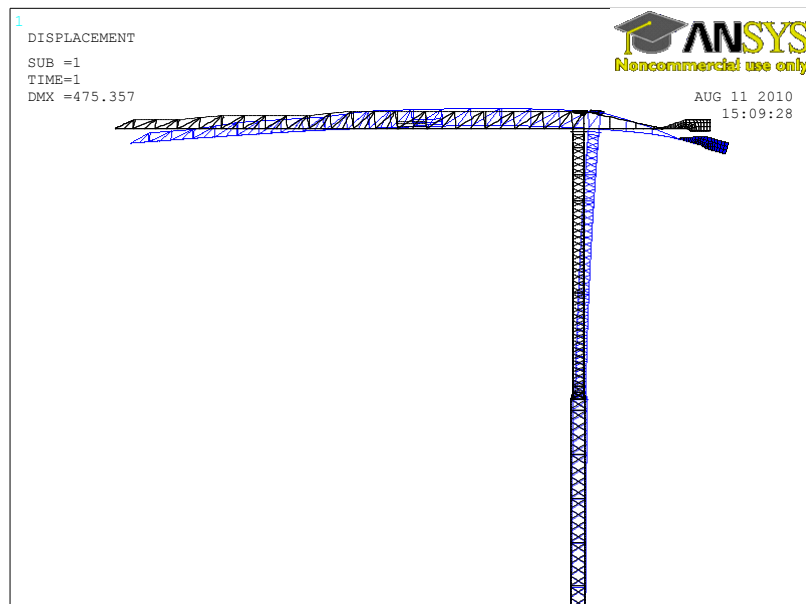


Figura 101. Deformada del modelo de elementos finitos construido con elementos BEAM44 y SHELL63

A continuación, se analizará el estado tensional más crítico del modelo. En la figura 102 puede detectarse que las tensiones siguen manteniendo una gran uniformidad,

observándose que la chapa que se ha modelado hace que éstas se repartan de forma más compensada entre la flecha y la contraflecha.

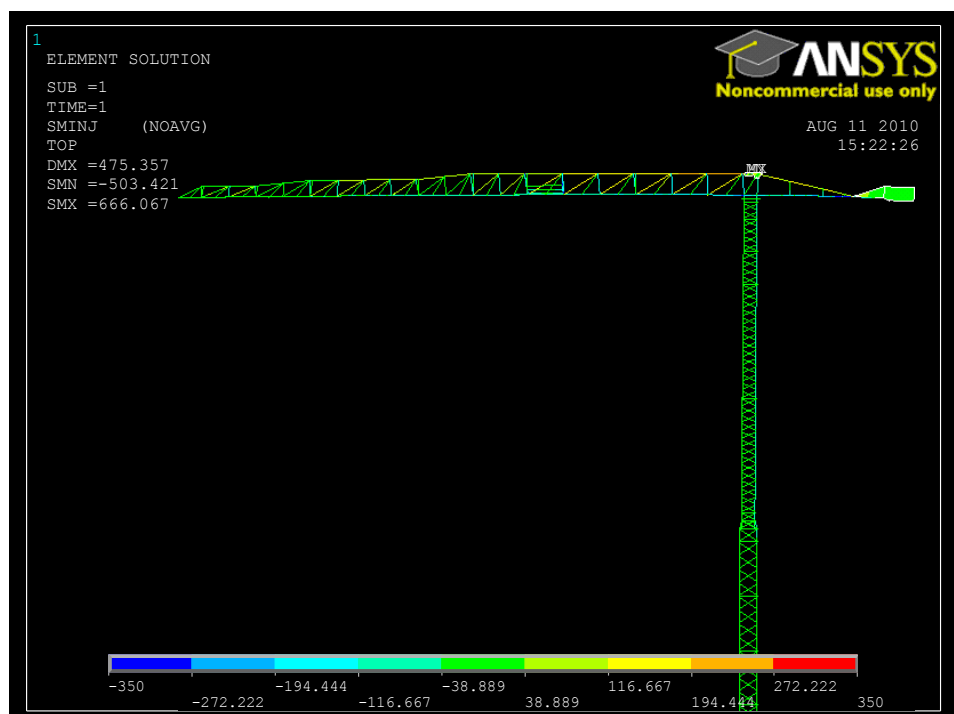


Figura 102. Estado tensional más crítico del modelo de elementos finitos construido con elementos BEAM44 y SHELL63

Entre los elementos que siguen estando modelizados como BEAM44 cabe destacar la presencia de una zona de tensión de **689.63 MPa**, correspondiente al bulón que se sitúa entre las placas, en la parte anterior de las mismas, y que sirve como sujeción de la parte superior de la flecha. Se considerará que en esta zona, debido a la simplificación a la que ha sido sometida (ya que, si se hubiera construido de manera adecuada, los esfuerzos existentes se repartirían sobre una cantidad de material mayor, no se concentraría toda la tensión en un único punto sobre el bulón y, por ende, la tensión disminuiría) (ver figura 103) y a la complejidad de su modelización, dicho valor de tensión es admisible.

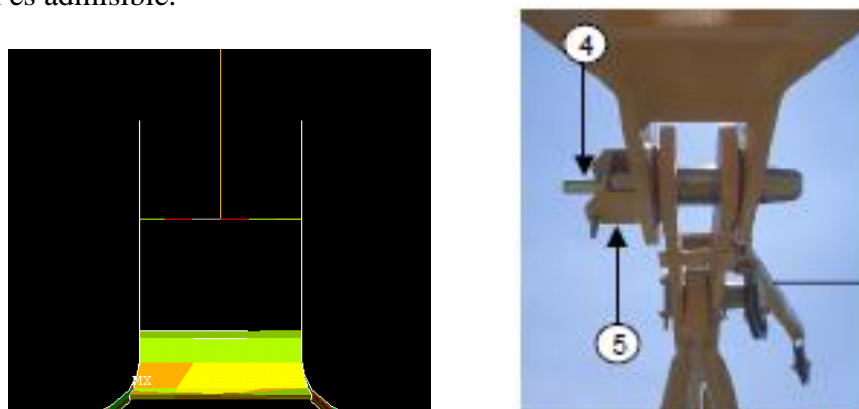


Figura 103. Comparación de la modelización del bulón y del bulón real

Sin embargo, como ocurría en el modelo construido con elementos BEAM44, siguen apareciendo tensiones que superan ampliamente el límite elástico (hasta **675 MPa**) en las placas de unión de la torre con la flecha y la contraflecha (ver figura 104). Es de interés mencionar que para obtener el estado tensional de elementos SHELL y SOLID, el programa ANSYS muestra la tensión de Von Mises sin tener que recurrir a la generación de una tabla, como ocurría en caso del elemento BEAM44.

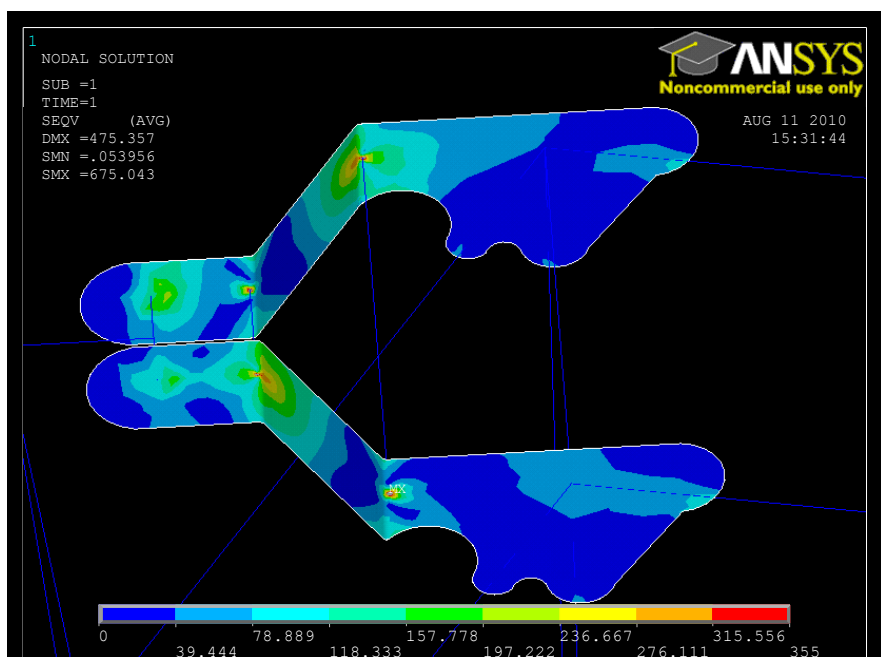


Figura 104. Estado tensional de la placa modelizada.

Se observa en la figura 104, que la mayor parte de la placa está sometida a tensiones menores que el límite elástico. La concentración de tensión aparece en las zonas en las que las placas se curvan y se unen a los perfiles que existen entre ellas. Esto se justifica teniendo en cuenta que los esfuerzos existentes en dichos perfiles generan unas tensiones que se concentran, sobre la placa, en un único punto y no sobre la geometría que el perfil definiría. El motivo de este fenómeno es que se están conectando un elemento BEAM44 y un elemento SHELL63 y, el primero de ellos, aunque el comando /ESHAPE muestre su forma, en el análisis de tensiones se comporta como una línea.

Por tanto, los perfiles que se sitúan en las zonas especificadas deberán, también, ser modelizados como elemento SHELL63.

6.3.2 Segunda fase: Modelización de los perfiles.

El proceso de modelización, mallado y solución es exactamente el mismo que se aplicó en el apartado 6.3.1. Por ello, en esta sección se pasará directamente al análisis de los resultados, obtenidos a partir del mismo estado de carga y de la misma posición de la grúa que en los casos anteriores.

Con esta nueva geometría, a nivel general la estructura tendrá un comportamiento muy similar al del caso analizado en el apartado 6.3.1. La única variación que aparecerá será la redistribución de las tensiones sobre la placa y sobre los perfiles constituidos, ahora, por elementos SHELL63. De hecho, el desplazamiento máximo existente será de **484 mm** (prácticamente igual al caso anterior) y el estado tensional se mantendrá inalterable, tal y como puede observarse en la figura 105.

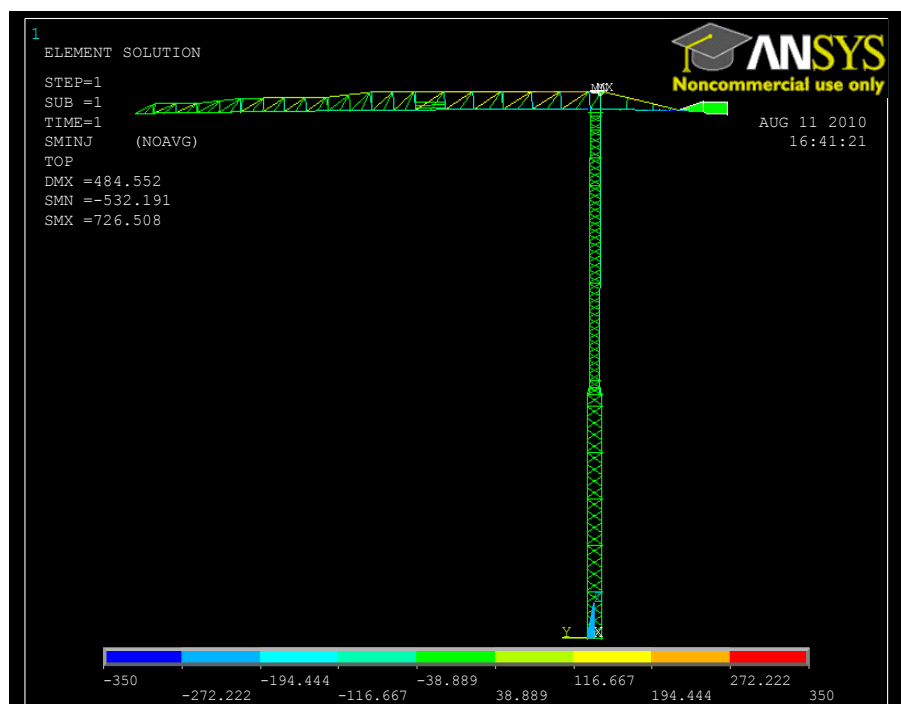


Figura 105. Estado tensional tras la modelización de los perfiles con elementos SHELL63.

Por tanto, el interés debe recaer sobre el conjunto de elementos placa, cuyo estado tensional se muestra en la figura 106. Al producirse la modelización de los perfiles que se encontraban entre las placas en las zonas críticas, se observa que la tensión máxima existente se sitúa en **388.4 MPa**. Este valor es ligeramente superior al marcado por el límite elástico (**355 MPa**), es decir, la chapa que constituye el perfil está punzonando a la placa soporte, pero se encuentra por debajo del límite de rotura (**470 MPa**). Por tanto, se podría decir que existe plastificación local. Este fenómeno consiste en que, en un determinado punto del material, existe una elevada concentración de tensiones que hace que el material plastifique en dicho punto. Dado que el acero es un material dúctil, bajo esta situación e, incluso, bajo fallo local (cuando se supera el límite de rotura) es capaz de redistribuir las tensiones sobre el resto de material. Esto limitaría la vida útil del mismo y se debería hacer un profundo estudio de fatiga que no es objeto de este proyecto, pero la grúa soportaría las cargas a las que está siendo sometido durante un número determinado de ciclos.

Sin embargo, observando la figura 106, se detecta que la máxima concentración de tensiones aparece en zonas (o muy cerca de ellas) donde existirían, si se hubieran modelizado, soldaduras. El Código Técnico de la Edificación (CTE) especifica que la calidad del acero de la soldadura debe ser igual o mayor que el de la pieza que se está

usando, pero durante la realización de las soldaduras existen una gran cantidad de parámetros incontrolables que impiden certificar dicho requisito.

Por tanto, es de interés la modelización tanto de la geometría de la figura 106 como de las soldaduras con elementos sólidos.

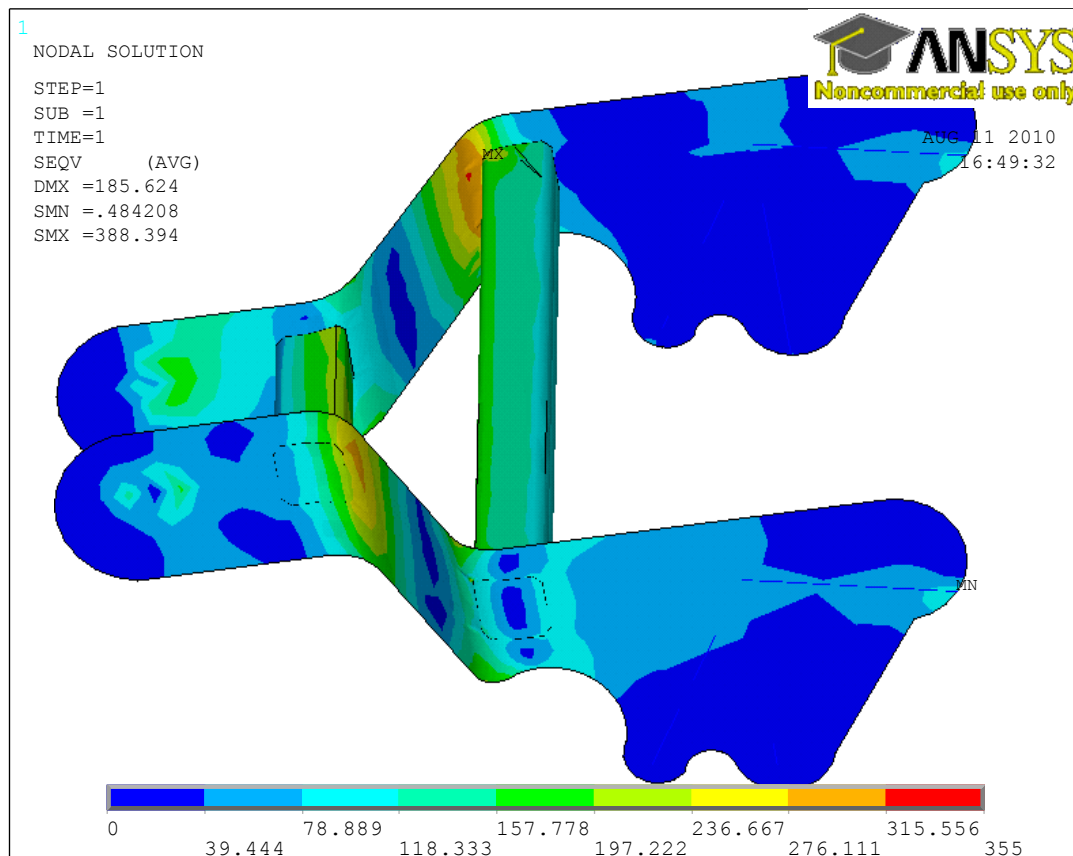


Figura 106.Estado tensional del conjunto de elementos placa.

6.4 Modelización con elementos viga BEAM44 y sólido SOLID45.

La solución del modelo del apartado 6.3 mostró la existencia de tensiones elevadas en la zona de la soldadura de los perfiles con las chapas soporte. En esta sección se modelizarán tanto las placas, como los perfiles y las respectivas soldaduras con elementos SOLID45 y en caso de no obtener una solución lo suficientemente satisfactoria se procederá al rediseño del conjunto modelado anteriormente con SHELL63 y que se muestra en la figura 106.

El elemento SOLID45 es un tipo de elemento tridimensional que puede adquirir tanto forma tetraédrica como forma hexaédrica. Para la modelización de la zona de interés se considerarán elementos tetraédricos ya que, como se explica en el apartado

4.5.5, al ser éstos una generalización tridimensional del elemento triangular, tienen en el espacio una gran adaptabilidad. Esta condición fundamenta la elección de elementos tetraédricos, pues, a diferencia de lo que ocurría con elementos tipo placa (donde la geometría podía considerarse simple), modelizar adecuadamente el conjunto con elementos tridimensionales conlleva mayor complejidad.

6.4.1 Modificación de la geometría.

Se procede a sustituir los elementos SHELL63, manteniendo los elementos BEAM44, por elementos SOLID45 (ver figura 107). Éste elemento queda definido por ocho nodos y por las propiedades del material, es decir, no es necesario definir un conjunto de constantes reales para este tipo de elemento. Cada uno de los nodos posee tres grados de libertad: las traslaciones en los tres ejes x , y y z . La combinación de los desplazamientos de sus ocho nodos permite, a este elemento, mostrar, prácticamente, cualquier tipo de deformación.

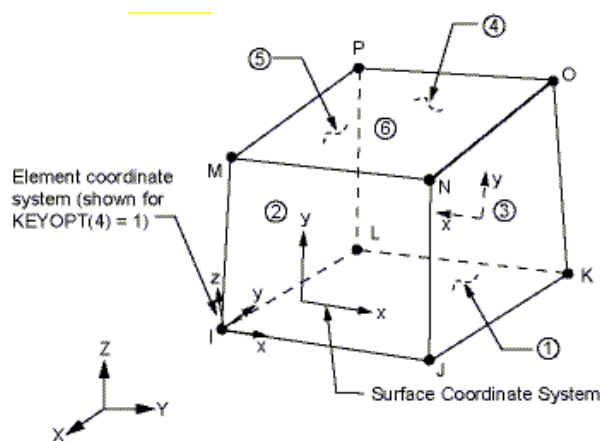


Figura 107. Elemento SOLID45

En cuanto a la selección del modelo de material, éste, de nuevo, no varía y se mantiene el acero S355 JO.

La generación de la geometría de los sólidos se ha realizado a partir de una serie de áreas que envolvían un espacio vacío que se convertía en un determinado volumen sólido. Merece especial interés la generación de las soldaduras. Se han considerado que son soldaduras perfectas unidas por una cara al perfil y por otra a la placa, con una profundidad de garganta de **12.5 mm** (el máximo, considerando que **12.5 mm** es el espesor del perfil y **50 mm** el de la placa.) y estando el material de aporte perfectamente repartido, sin que aparezcan discontinuidades, porosidad, inclusiones, penetración o fusión incompleta u otros defectos típicos de la soldadura.

De esta forma, tras el mallado, resulta la zona modificada que se muestra en la figura 108.

Por otra parte, el estado de cargas al que se encuentra sometida la estructura y la posición de la grúa, no varían respecto de los modelos analizados en apartados anteriores.

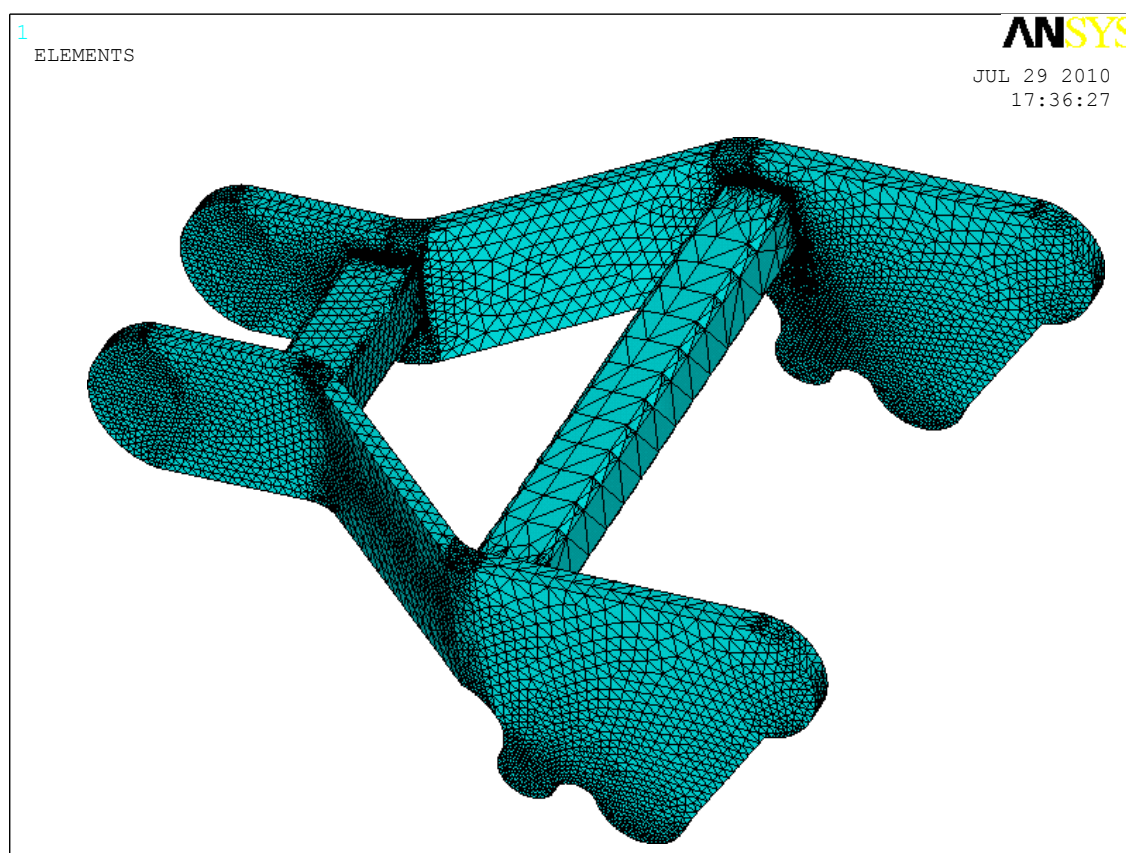


Figura 108. Placas y perfiles críticos modelizados con elementos SOLID45

6.4.2 Análisis de los resultados.

En el caso anterior, se ha demostrado el correcto comportamiento estructural de los elementos de la grúa tipo BEAM44. Por ello, en esta sección se centrará la atención en el comportamiento de los elementos tipo SOLID45 que se muestran en la figura 109.

En la figura 109, puede observarse el estado tensional al que se encuentra sometida la pieza de interés. Existe una zona de acumulación de tensiones altamente elevadas (de hasta **986 MPa**) que, desde este momento, no se tendrá en consideración debido a que surge como consecuencia de la combinación de un elemento BEAM44 y de otro SOLID45 en un mismo nodo, lo que el programa ANSYS no interpreta de manera adecuada. De hecho, en el apartado 6.3.2, en la figura 106, modelizada con elementos SHELL63, no se observa dicha zona de concentración de tensiones, lo que viene a confirmar la consideración anterior.

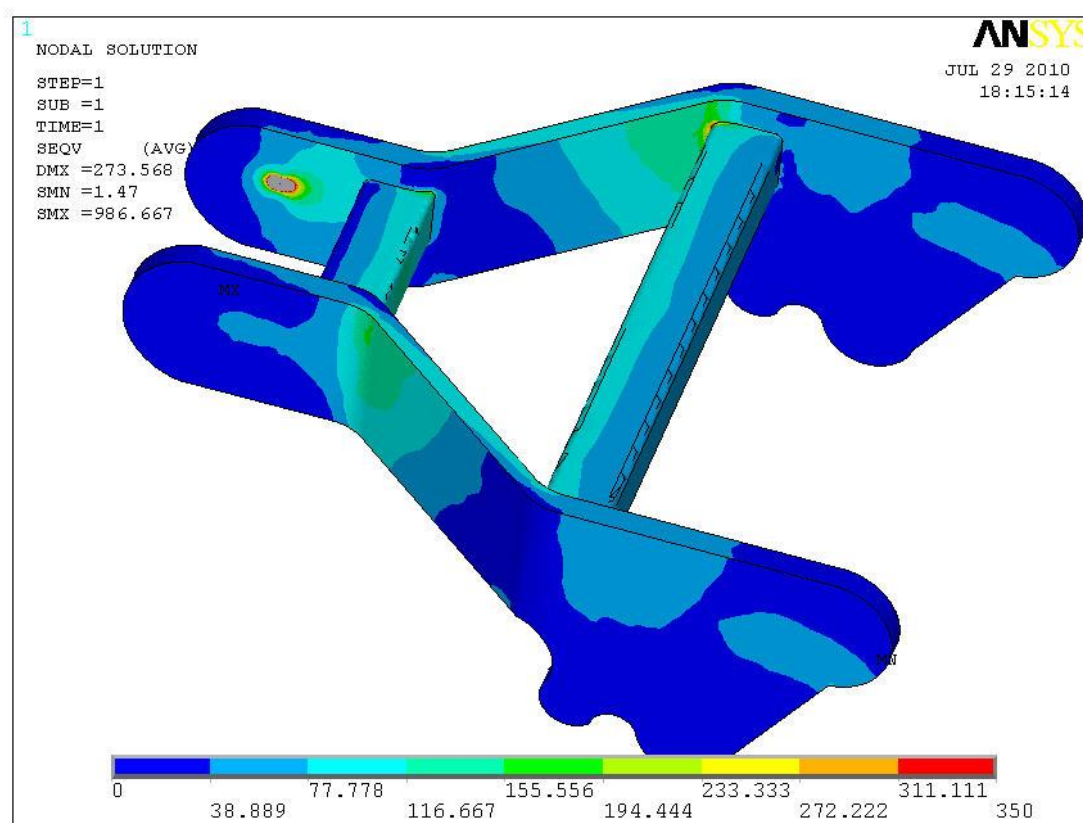


Figura 109. Estado tensional de los elementos SOLID45

Despreciando la zona de acumulación de tensiones antes descrita, se continua con el análisis del estado tensional del resto de zonas de las placas (figura 110), de los perfiles (figura 111) y del cordón de soldadura (figura 112).

En el caso de las placas, la tensión máxima que se alcanza es de **418 MPa**, por debajo del límite de rotura, por lo que podría considerarse, como se explicó anteriormente, una plastificación local.

Se observa, por otra parte, que, sobre los perfiles, la tensión máxima que aparece es de **158 MPa**, lo que no supera el límite elástico y, por tanto no genera posibilidad alguna de plastificación y rotura.

El caso más crítico, aparece en el cordón de soldadura del perfil más largo, sobre el que la tensión máxima es de **400 MPa**, muy por encima del límite elástico. La posibilidad de considerar plastificación local en una soldadura es arriesgada, ya que dicha zona es crítica durante el funcionamiento de cualquier tipo de máquina o estructura.

Por tanto, no sería descartable la aparición de fisuras por fatiga en la soldadura, por lo que no es posible confirmar certeramente la ausencia de fallo a largo plazo sobre la grúa. Como consecuencia de ello, se decide llevar a cabo el rediseño del conjunto mostrado en la figura 108, con objeto de aumentar la vida útil de la estructura.

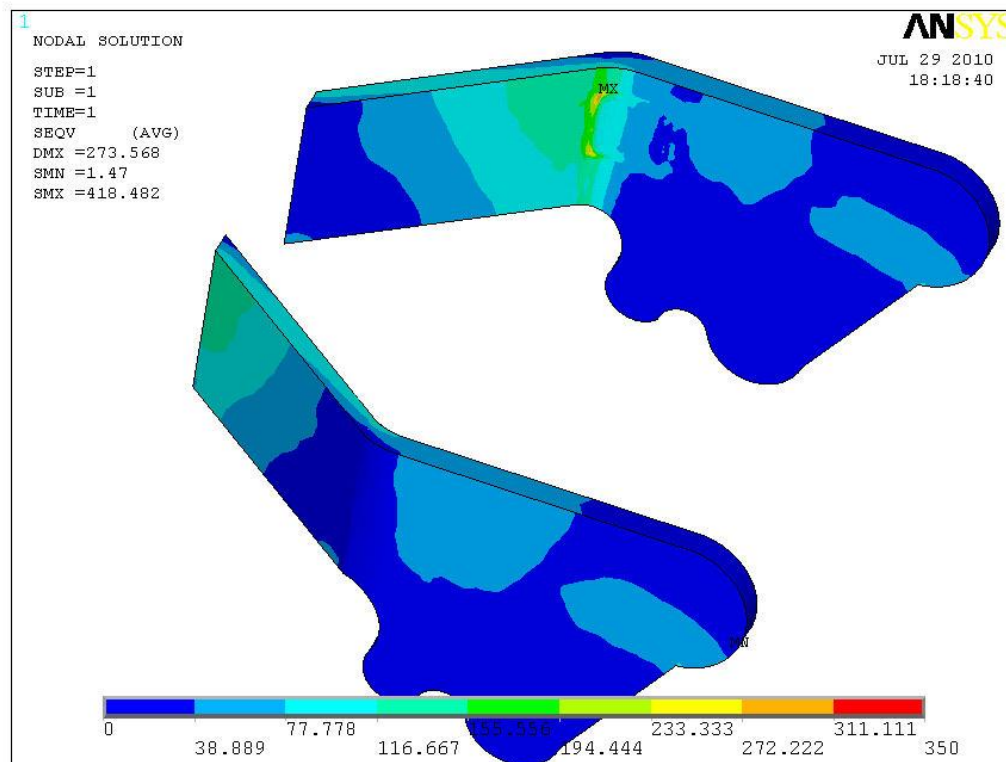


Figura 110. Estado tensional de las placas

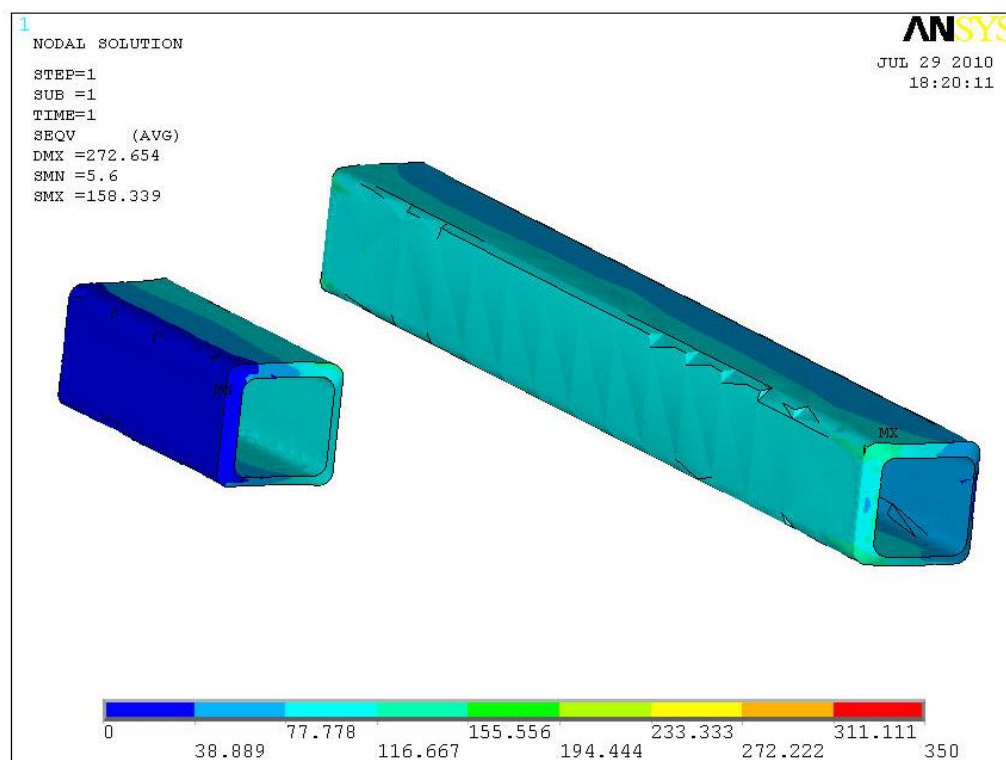


Figura 111. Estado tensional de los perfiles

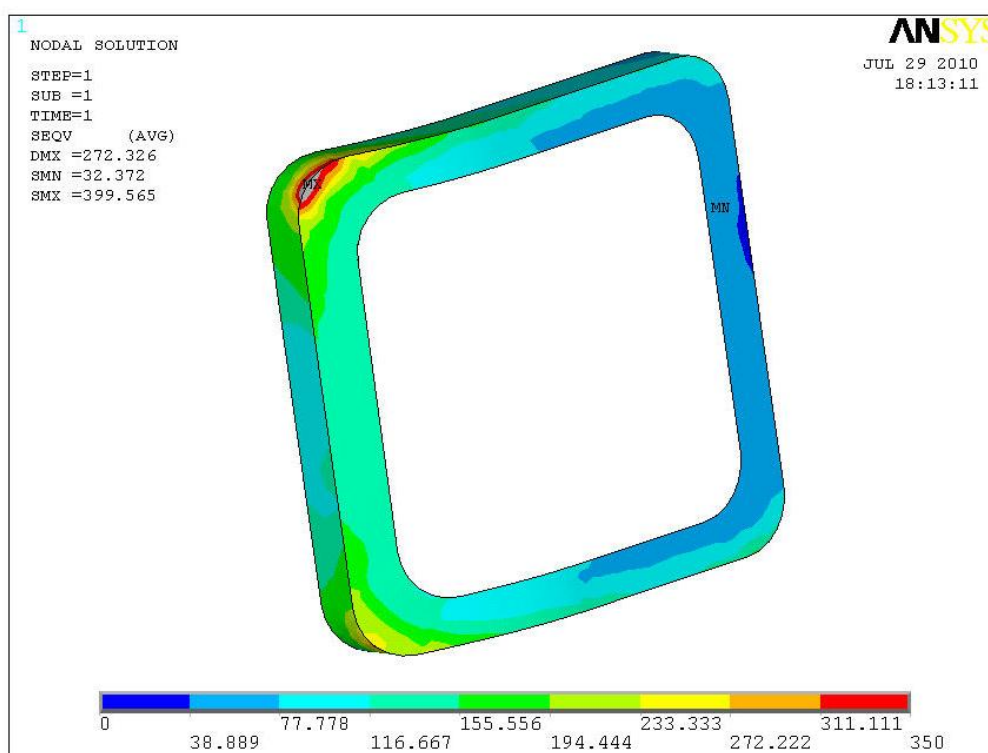


Figura 112. Estado tensional del cordón de soldadura

6.4.3 Rediseño de placas y perfiles de la unión de la torre, flecha y contraflecha.

Con el objeto de intentar reducir al máximo la tensión sobre los cordones de soldadura, se plantearon una serie de rediseños que se muestran en los siguientes apartados.

6.4.3.1 Primer rediseño.

La figura 109 muestra que la mayor concentración de tensiones aparece en la zona en la que la chapa se dobla y se une al perfil. Por ello, lo más consecuente sería desplazar los perfiles hacia la zona en la que la chapa ha perdido la curvatura (figura 113).

Se consigue así reducir la tensión existente sobre la placa hasta **284 MPa** (figura 114), pero como consecuencia del desplazamiento, aumenta la tensión sobre los perfiles hasta un valor de **211 MPa** (figura 115), lo que, en todo caso, es aceptable.

Sin embargo, la reducción de tensión sobre el cordón de soldadura del perfil más largo (figura 116) es prácticamente inapreciable (**391 MPa**), lo que lleva a la conclusión de que la distancia entre los perfiles es un parámetro que influye, en el

estado tensional, tanto como la curvatura de la chapa. A la vista de los resultados será necesario realizar un segundo rediseño.



Figura 113. Primer rediseño.

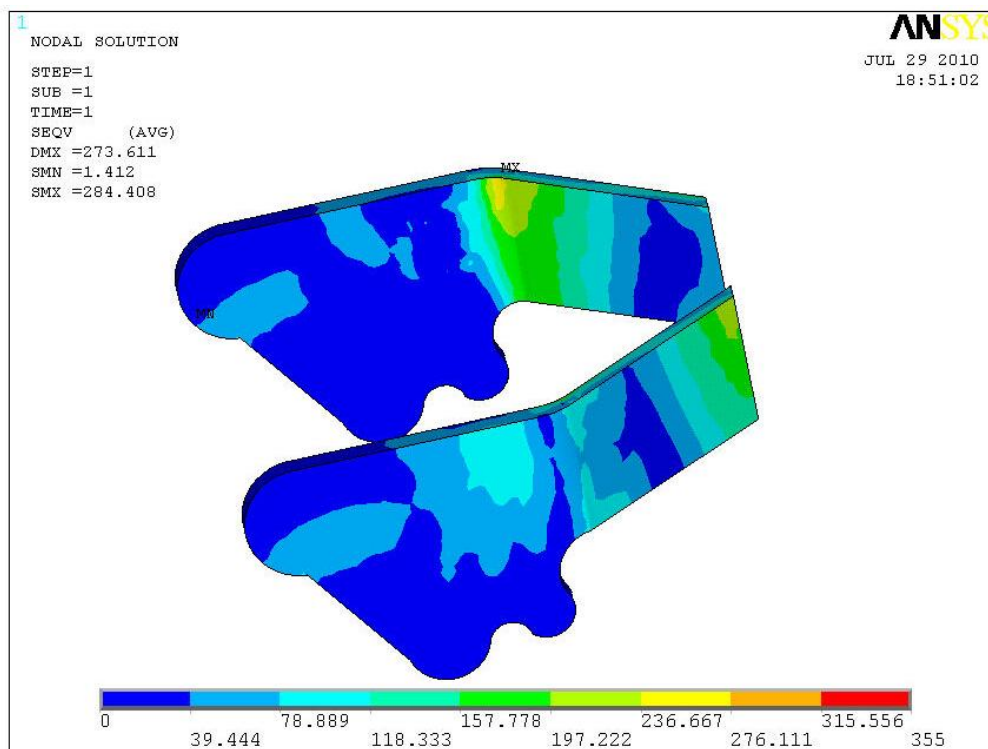


Figura 114. Primer rediseño: Estado tensional de las placas

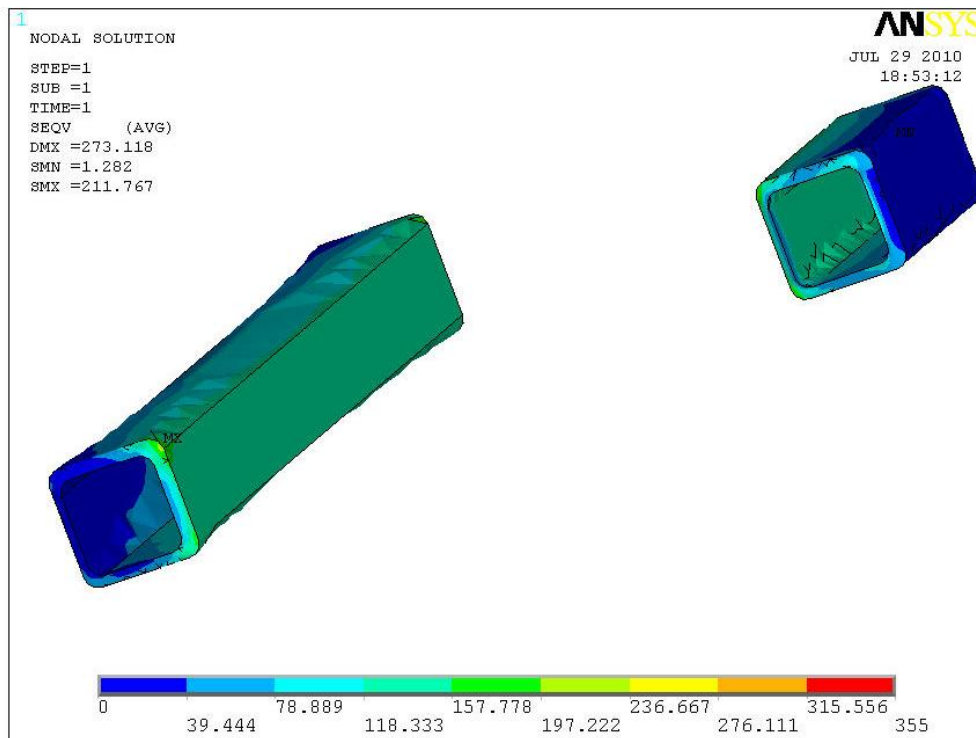


Figura 115. Primer rediseño: Estado tensional de los perfiles

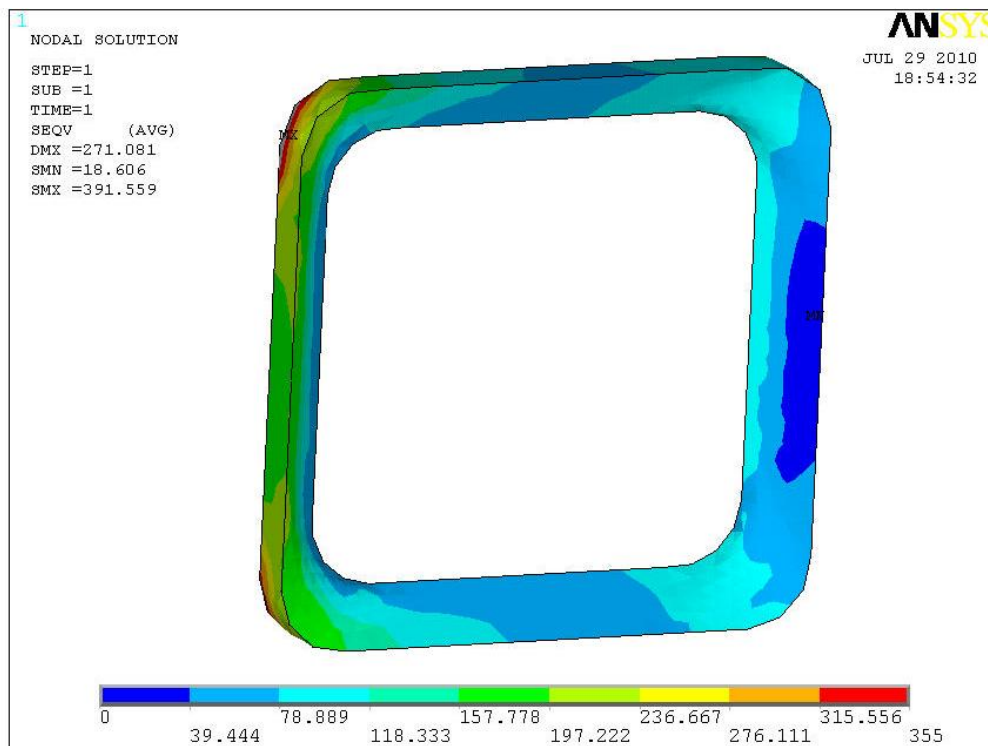


Figura 116. Primer rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura

6.4.3.2 Segundo rediseño.

La suposición de que la distancia entre los perfiles influye en el estado tensional de los cordones de soldadura tanto como la intersección curva de los mismos con la placa lleva a la decisión de introducir un nuevo perfil entre los dos anteriores con las mismas dimensiones que estos, manteniendo la unión de los perfiles originales en la zona curvada de la chapa (figura 117). El objeto de esta decisión es crear la posibilidad de separar los dos perfiles originales eliminando la influencia de la distancia entre ellos, que sería absorbida por el tercer perfil introducido.

La consecuencia de este rediseño es el aumento de la tensión sobre la placa (hasta los **457 MPa**), sobre los perfiles (**167 MPa**) y sobre el cordón de soldadura del perfil más largo (**418 MPa**), como se puede observar en las figuras 118, 119 y 120, respectivamente, respecto del diseño original.

Así, a diferencia de lo que se esperaba, la modificación del diseño original introduciendo un perfil entre los originales genera un estado tensional aún más crítico que el primero. El tercer perfil no absorbe esfuerzos con objeto de que se reduzca la tensión, sino que aumenta la rigidez del conjunto, con el aumento de tensión que ello conlleva.

No obstante, la posibilidad de que el tercer perfil comience a absorber esfuerzos en el momento en que sean separados los dos perfiles originales no es despreciada.



Figura 117. Segundo rediseño.

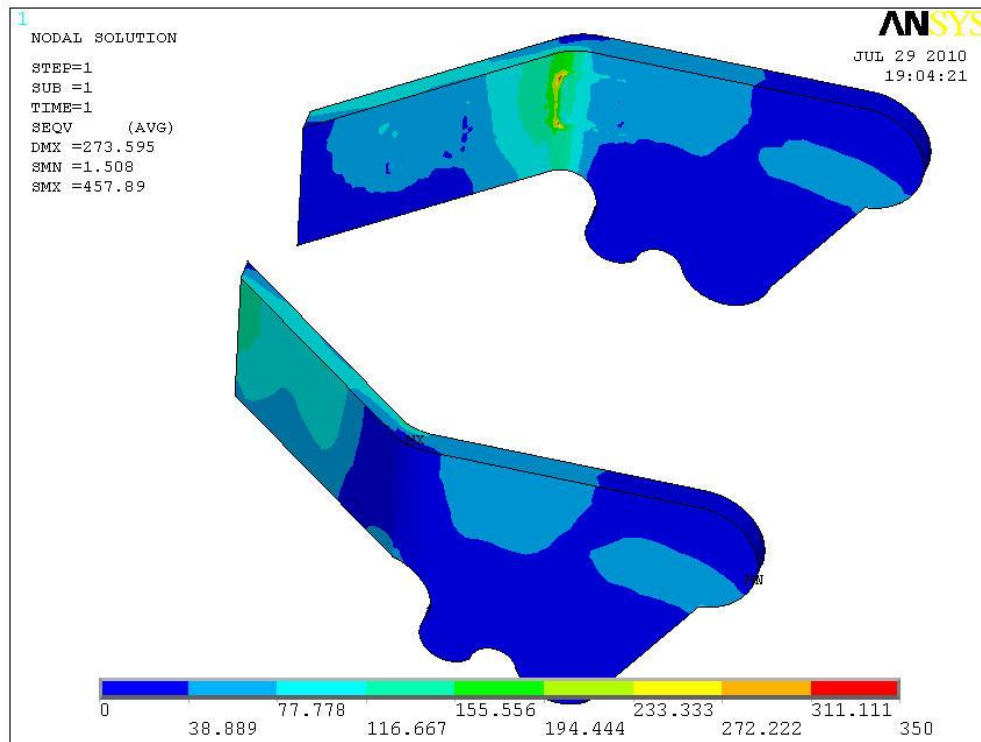


Figura 118. Segundo rediseño: Estado tensional de las placas

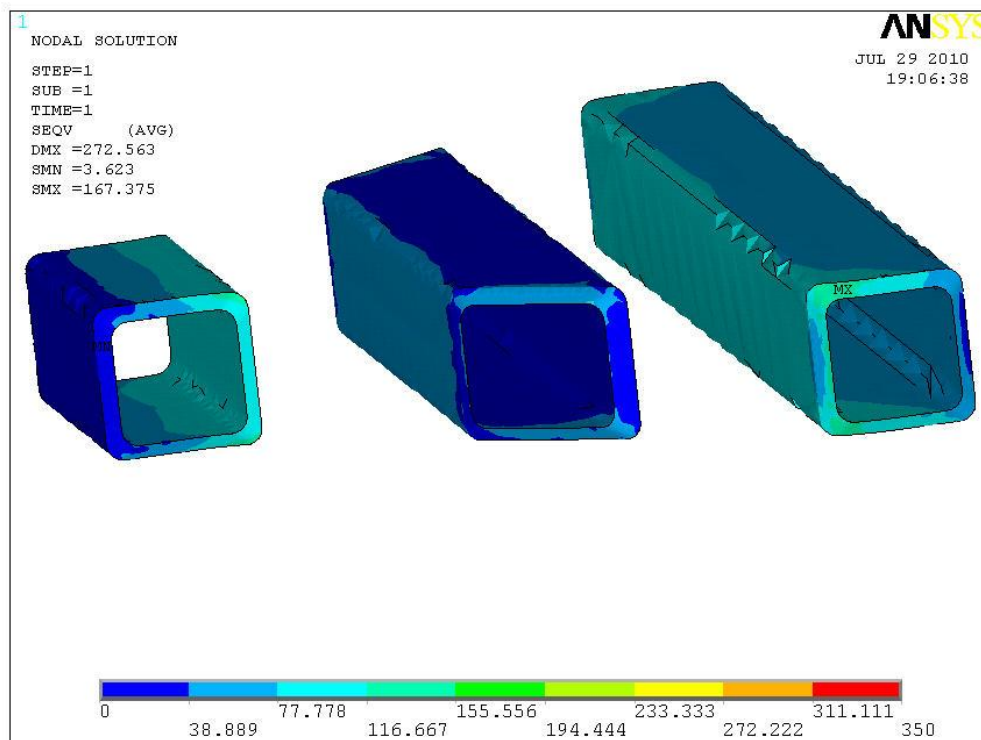


Figura 119. Segundo rediseño: Estado tensional de los perfiles

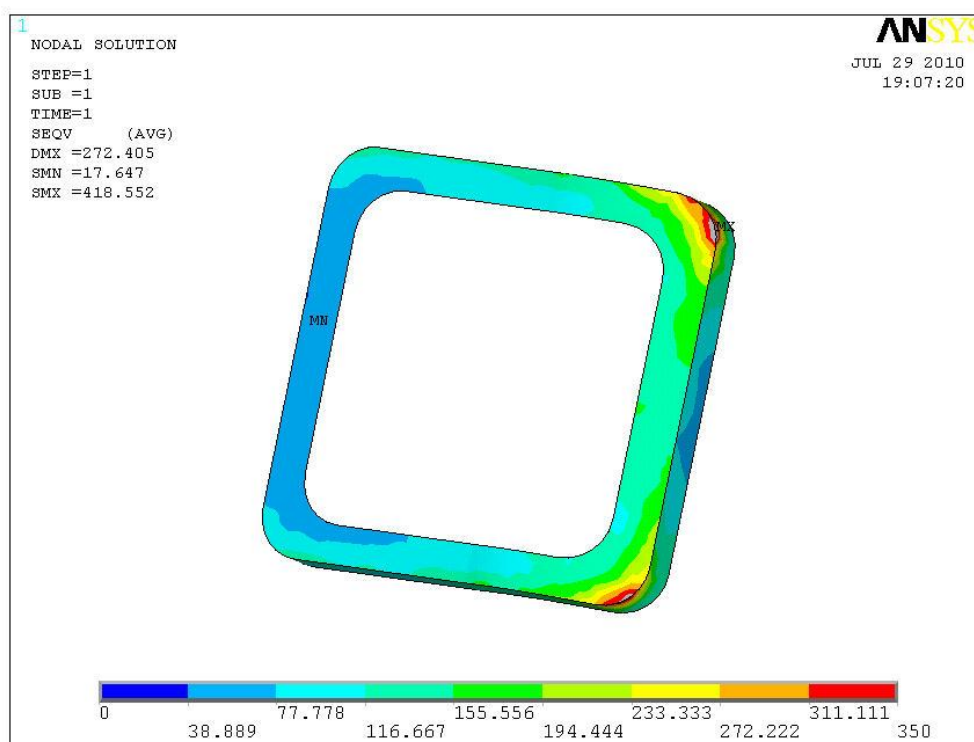


Figura 120. Segundo rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura

6.4.3.3 Tercer rediseño.

Como consecuencia del estudio anterior, se decide mantener el tercer perfil añadido desplazando el perfil más solicitado (el más largo) hacia la zona donde la chapa pierde la curvatura (figura 121).

Con ello, la tensión sobre la chapa (figura 122) disminuye hasta los **276 MPa** y sobre los perfiles (figura 123 hasta los **143 MPa**. El cordón de soldadura más crítico (figura 124) deja de ser el del perfil largo y pasa a ser el del perfil corto, cuya tensión se eleva a los **280 MPa**.

Se observa, por tanto, que la disminución de la concentración de tensiones significativa, que se podría considerar totalmente aceptable teniendo en cuenta el límite elástico mínimo del material de soldadura (**355 MPa**).

No obstante, se seguirá trabajando con objeto de disminuir la tensión en mayor medida para evitar fallos por posibles negligencias del operario soldador o por la influencia de factores incontrolables durante el proceso de soldadura.

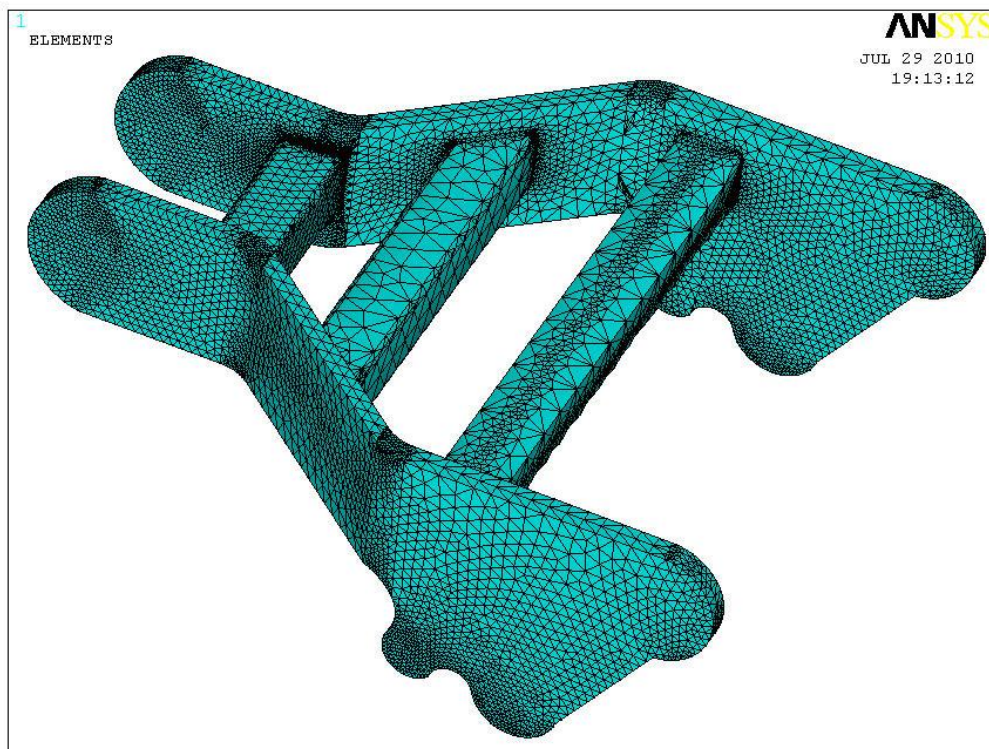


Figura 121. Tercer rediseño.

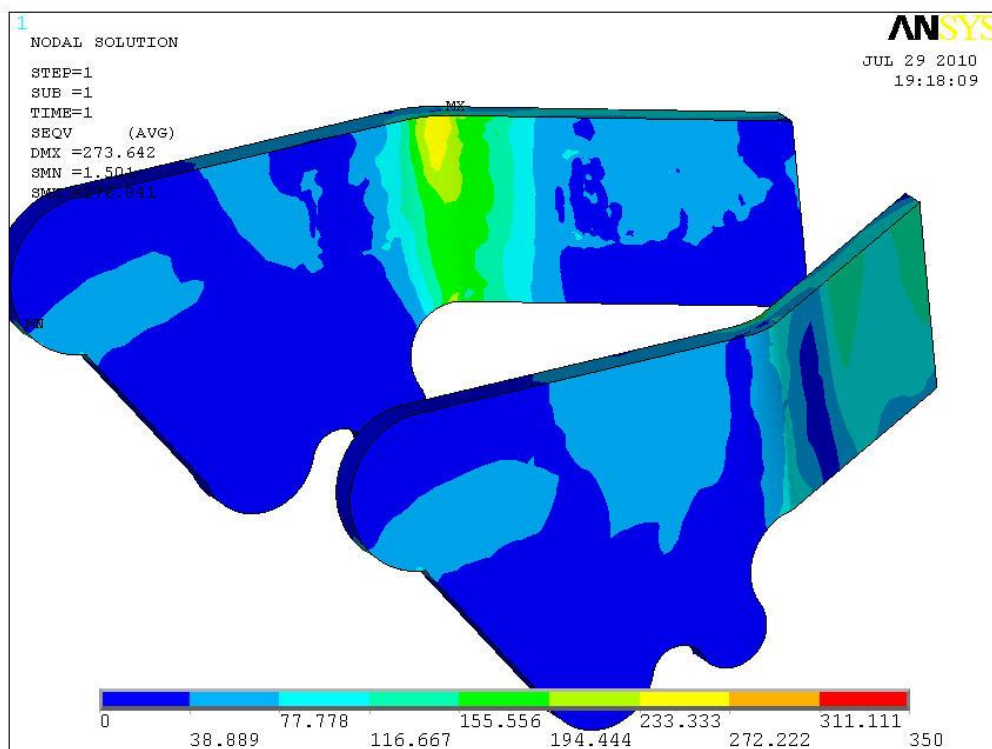


Figura 122. Tercer rediseño: Estado tensional de las placas

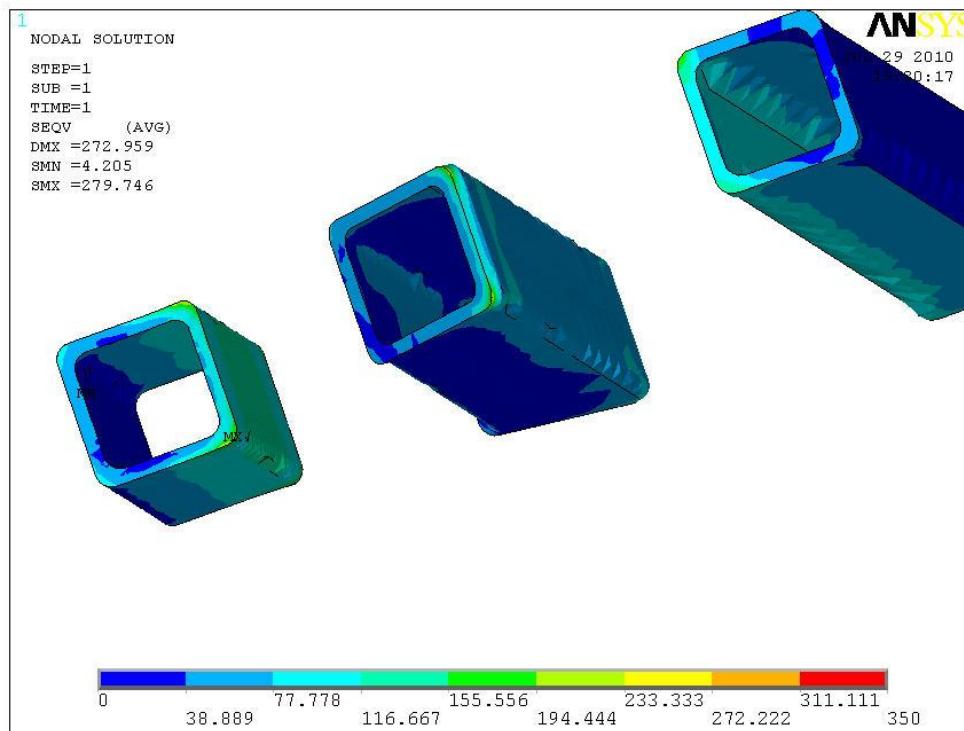


Figura 123. Tercer rediseño: Estado tensional de los perfiles

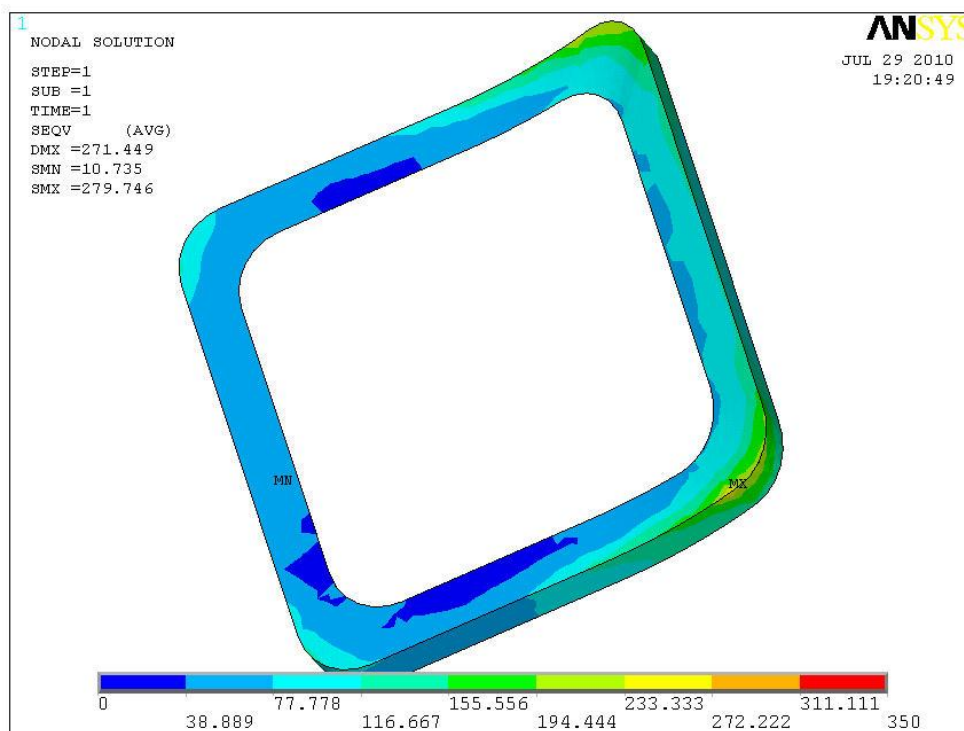


Figura 124. Tercer rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura

6.4.3.4 Cuarto rediseño.

En el último estudio se determinó que la tensión máxima se encontraba sobre el cordón de soldadura del perfil más corto de los tres existentes. Dicho perfil se encontraba unido a la placa en la zona en que ésta estaba curvada, por lo que parece lógico, por lo visto hasta el momento, que si se quiere disminuir la tensión sobre el cordón de soldadura se debería desplazar el perfil hacia la zona donde la placa pierde la curvatura, tal y como se muestra en la figura 125.

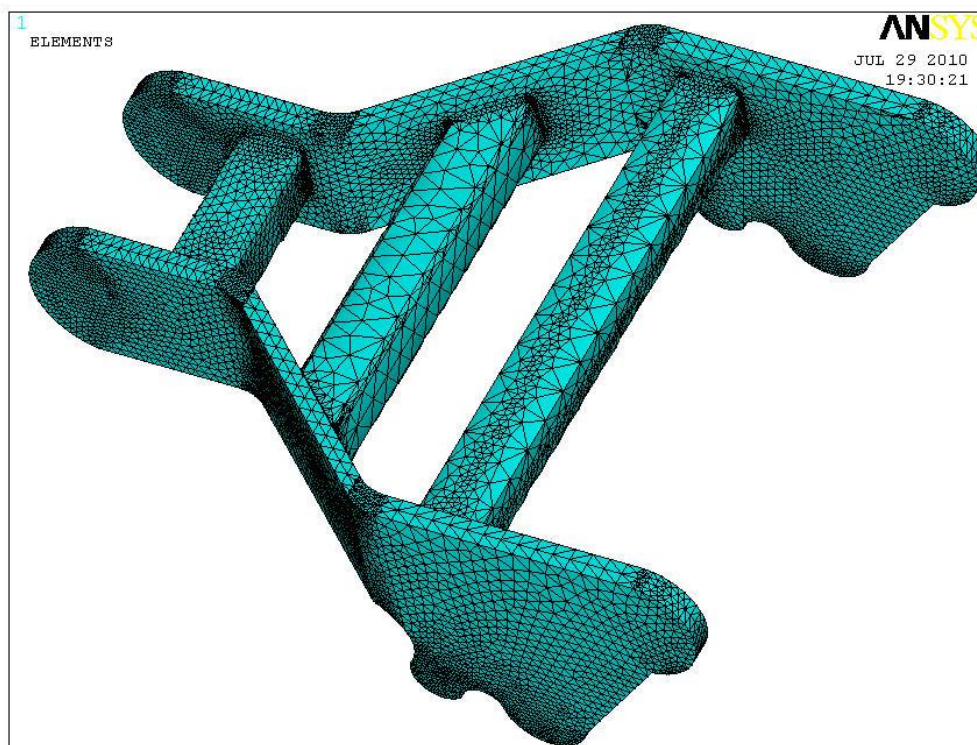


Figura 125. Cuarto rediseño.

La consecuencia directa de esta modificación no es la prevista. La tensión sobre la chapa (figura 126) no varía de forma destacable (**286 MPa**) respecto del tercer rediseño, pero sobre el perfil más corto (figura 127) y sobre el cordón de soldadura de dicho perfil (figura 128), las tensiones se elevan hasta los **215 MPa** y los **408 MPa**, respectivamente.

La tensión existente sobre el perfil sería completamente asumible, pero la existente sobre el cordón de soldadura, por los motivos expuestos en otros apartados, no es siquiera considerable.

Sin embargo, este rediseño aporta información: nos lleva a la conclusión, contrariamente a lo que se podría pensar, de que la disposición idónea para el perfil de la zona estrechada está en la parte curvada de la placa.

Por tanto, la opción restante para la disminución de la tensión en el cordón de soldadura del perfil corto consiste en variar la posición del perfil que se añadió en el segundo rediseño.

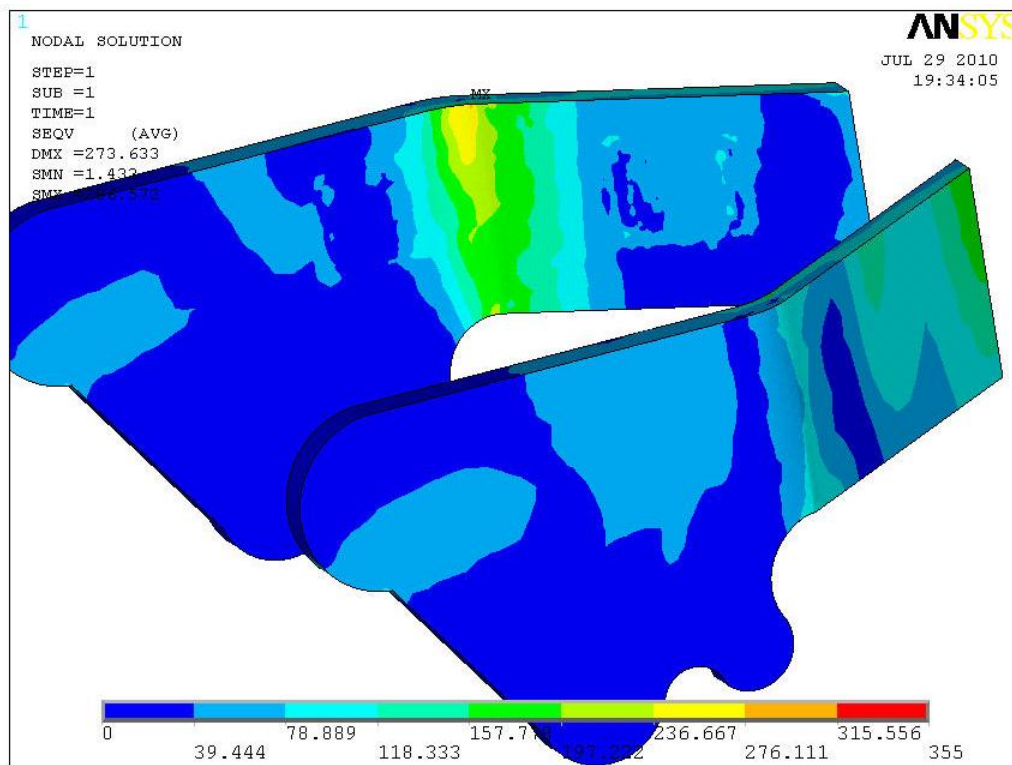


Figura 126. Cuarto rediseño: Estado tensional de las placas

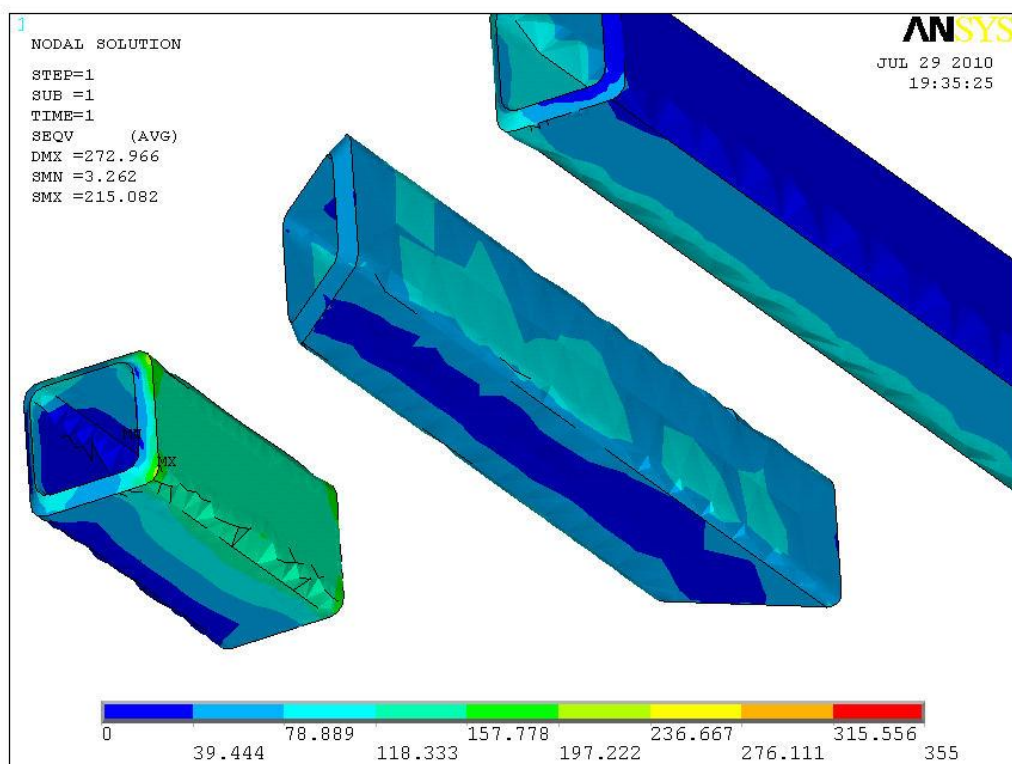


Figura 127. Cuarto rediseño: Estado tensional de los perfiles

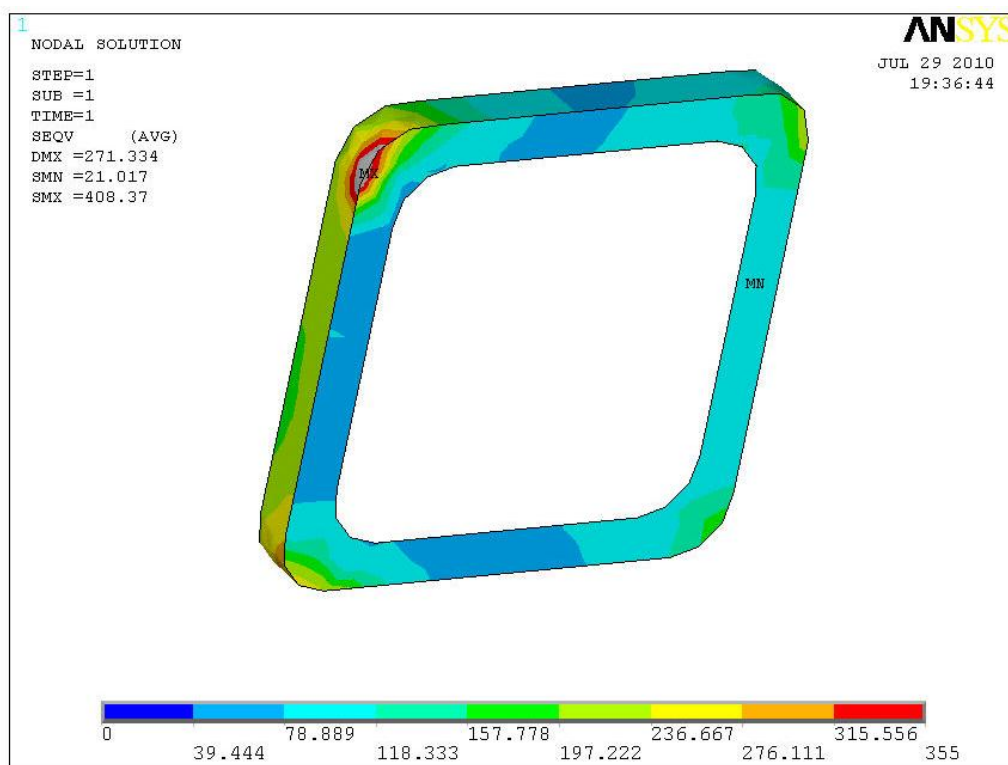


Figura 128. Cuarto rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura.

6.4.3.5 Quinto y sexto rediseños.

Como se ha demostrado en el apartado anterior, si se quiere mantener la configuración de los tres perfiles entre las dos placas, la única opción existente para disminuir la tensión sobre el cordón de soldadura del perfil de la zona más estrecha es el desplazamiento del perfil de la zona media.

De esta forma, el acercamiento del perfil añadido hacia el perfil corto haría que el primero absorbiera parte de los esfuerzos destinados al segundo. De esta manera, el perfil medio se cargaría y el corto se descargaría, con la consecuente variación de tensión que ello conlleva.

El quinto rediseño (figura 129) verificaba esta hipótesis y, tanto los cordones de soldadura del perfil corto como del perfil medio se reducían a unos valores de tensión aceptables. Sin embargo, el alejamiento del perfil medio respecto del largo hizo que este se cargara y el cordón de soldadura del mismo alcanzó un valor de **308 MPa** (figura 130), lo que no se consideró admisible.

Para solucionar este inconveniente, se decidió desplazar ligeramente el perfil medio hacia el más largo, con objeto de compensar el incremento de tensión surgido. Esto dará lugar al sexto rediseño. (figura 131).

Los resultados obtenidos en este último rediseño mostraron que, sobre el cordón de soldadura del perfil largo (figura 132), la tensión tenía un valor de **279 MPa**, prácticamente idéntico al valor del tercer rediseño.



Figura 129. Quinto rediseño.

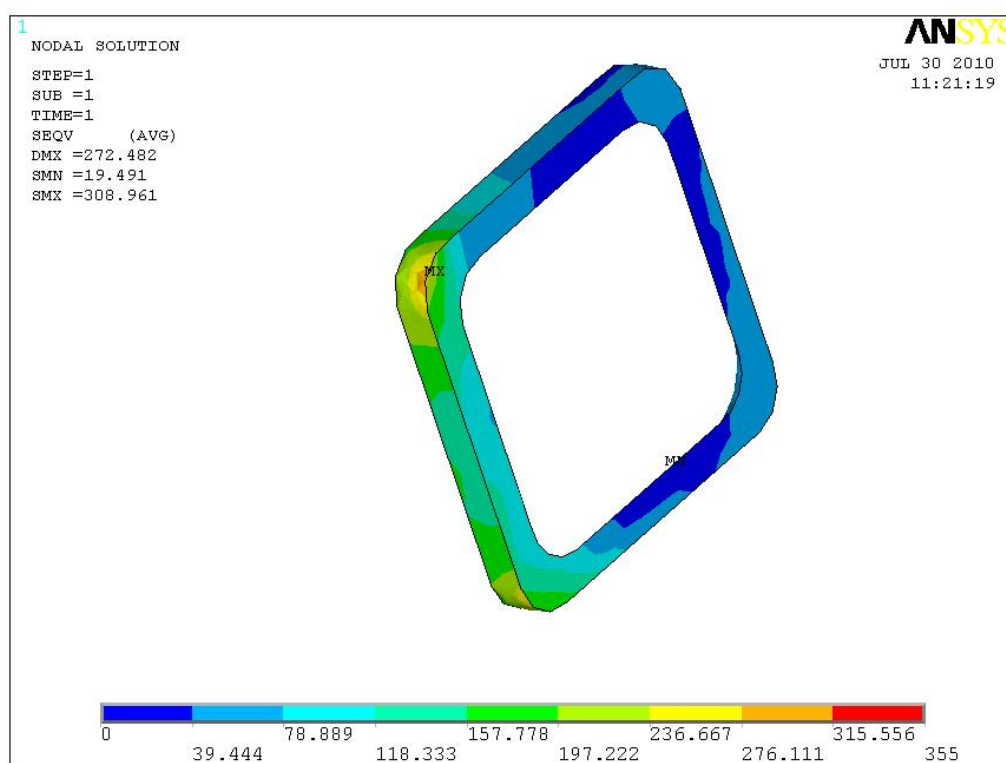


Figura 130. Quinto rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura.

Por tanto, con la disposición de tres perfiles, lo máximo a lo que puede ser reducida la tensión es a un valor entre **270 MPa** y **280 MPa**, lo que no se consideró suficiente para dar por válido el rediseño.

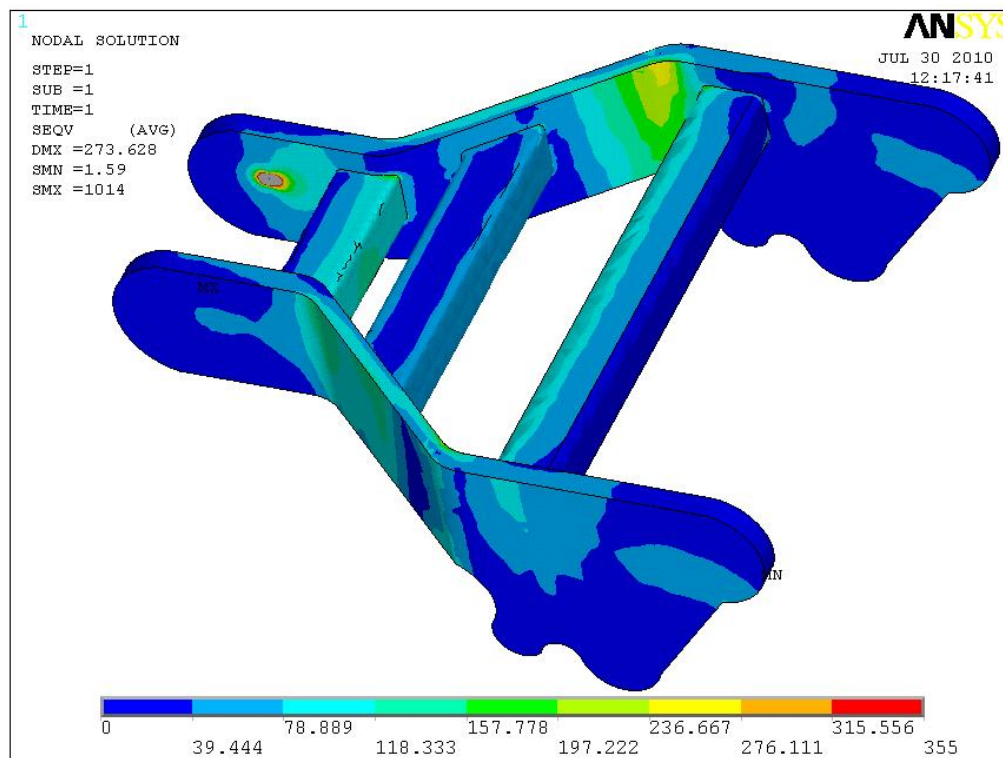


Figura 131. Sexto rediseño: Estado tensional

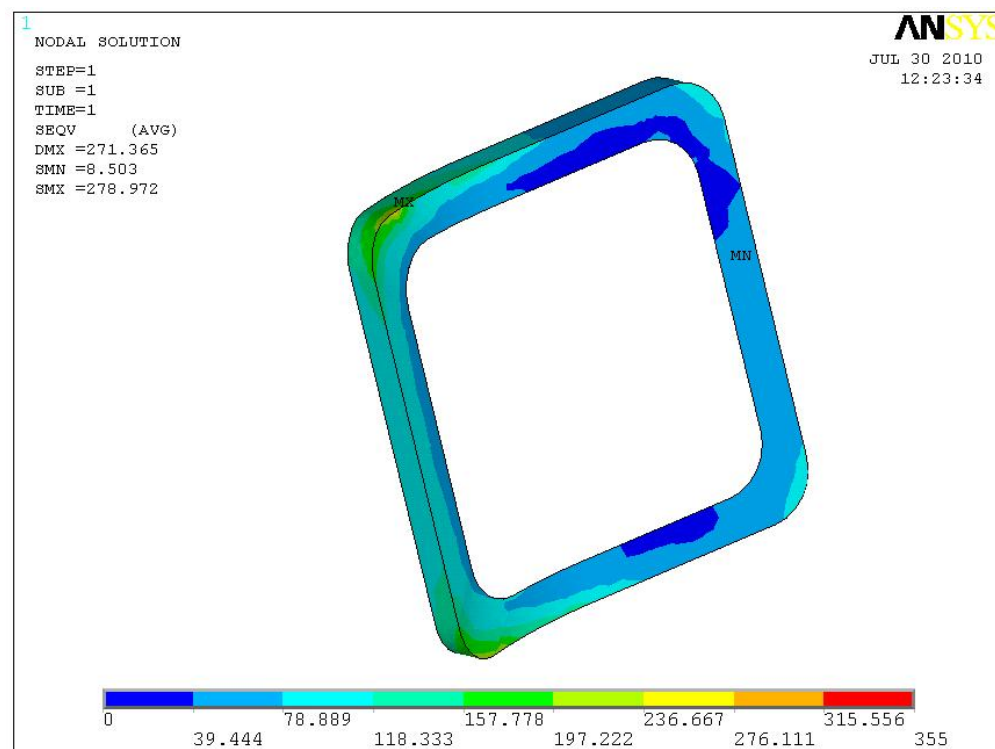


Figura 132. Sexto rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura.

6.4.3.6 Séptimo rediseño.

El último análisis realizado agotó las variables de la disposición de tres perfiles, por lo que se planteó la posibilidad de llevar a cabo un rediseño introduciendo dos perfiles nuevos entre los dos originales (figura 133).

De esta forma, se consiguió que la tensión sobre la placa se redujera hasta **213 MPa** (figura 134), sobre los perfiles hasta **113 MPa** (figura 135) y sobre el cordón de soldadura más solicitado hasta **240 MPa** (figura 136).

Comparando estos datos con los de anteriores rediseños, se observa claramente que este último es el que mejores condiciones de seguridad estructural ofrece, por lo cual es el escogido como solución válida.



Figura 133. Séptimo rediseño.

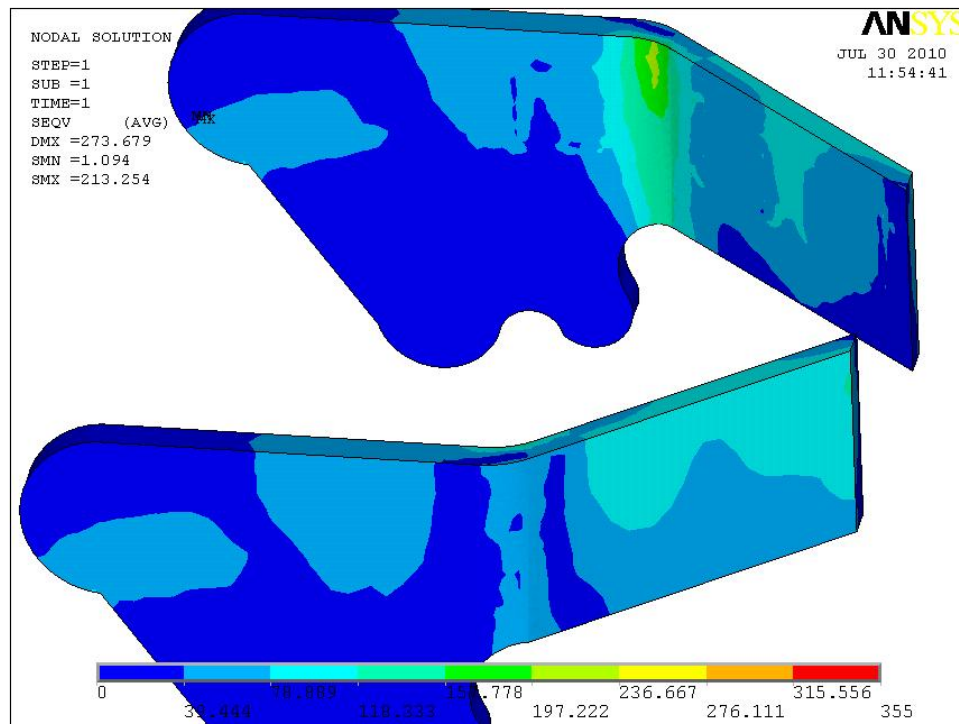


Figura 134. Séptimo rediseño: Estado tensional de las placas

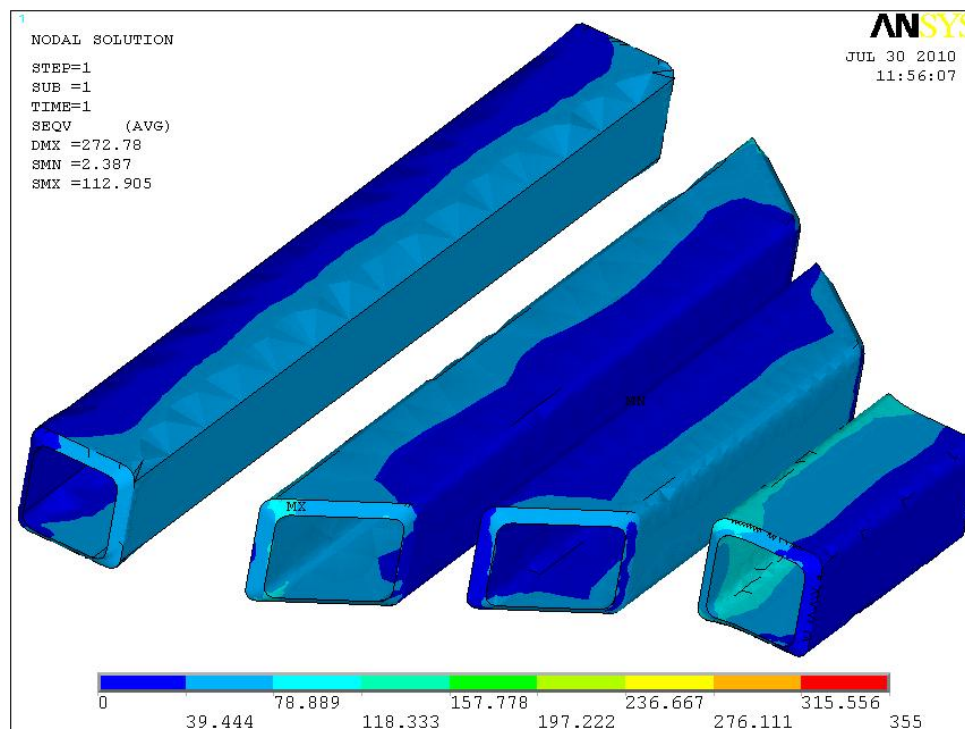


Figura 135. Séptimo rediseño: Estado tensional de los perfiles

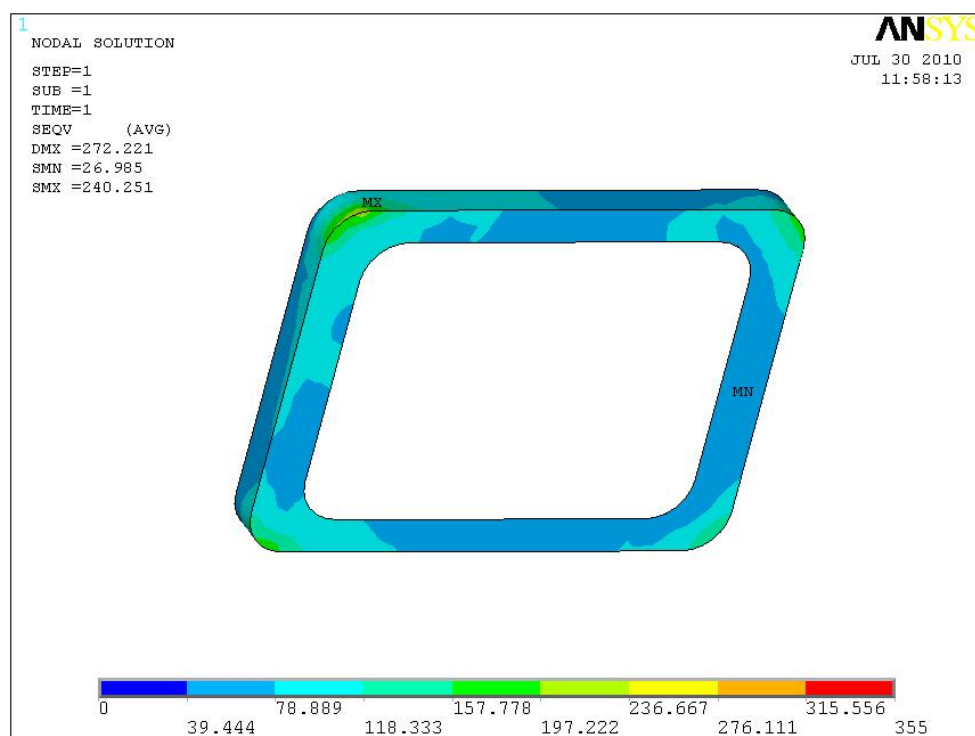


Figura 136. Séptimo rediseño: Estado tensional del cordón de soldadura.

6.4.3.7 Resumen de los datos obtenidos en los rediseños.

En la tabla 4 se resumen los datos obtenidos de cada uno de los rediseños. En la columna de decisión se muestran, en tono rojizo, los rediseños rechazados; en amarillo, los rediseños que serían admisibles pero que no han sido considerados óptimos; y en verde, el rediseño seleccionado.

Rediseño	Tensión máxima en la placa (Mpa)	Tensión máxima en perfil (Mpa)	Tensión máxima en cordón de soldadura (Mpa)	Decisión
1	284,408	211,767	391,559	Rechazado
2	457,89	167,375	418,552	Rechazado
3	276,841	142,955	279,746	Admisible
4	286,572	215,082	408,37	Rechazado
5	281,264	172,618	308,961	Rechazado
6	274,366	150,855	278,972	Admisible
7	213,254	112,905	240,251	Seleccionado

Tabla 4. Resumen de los datos obtenidos de los rediseños

6.5 Análisis de estados de trabajo de la grúa.

En los anteriores estudios realizados se consideró que la grúa se encontraba siempre sometida a las fuerzas generadas por el peso propio, por la masa levantada y por la masa del contrapeso y alineada con la torre, es decir, la grúa no estaba girada (figura 89).

Una vez se ha obtenido un diseño adecuado para las condiciones antes descritas, en la tabla 2 se muestran las tensiones y desplazamientos que se generan sobre la grúa, en diversas situaciones críticas, cuando se cambian las condiciones de la misma respecto del estado inicial. En la figura 137 se puede observar la grúa girada.

	Estado de la grúa	Tensión máxima (MPa)	Desplazamiento* máximo flecha (mm)	Desplazamiento* máximo contraflecha (mm)
Grúa en posición inicial	Grúa con carga máxima (1,15 tn)	348	-352,764	-475,357
	Grúa con exceso de carga (1,25 tn)	356	-598,8	-322,592
	Grúa con exceso de carga (1,4 tn)	367	-785,863	-252,064
	Grúa descargada	255	-232,744	-338,189
	Grúa con carga máxima (1,15 tn) y sin contrapeso	371	-3187	1039
	Grúa descargada y sin contrapeso	266	-1581	415,748
Grúa en girada 45°	Grúa con carga máxima (1,15 tn)	354	-559,713	-303,497
	Grúa con exceso de carga (1,25 tn)	358	-714,672	-250,126
	Grúa con exceso de carga (1,4 tn)	367	-955,477	-178,12
	Grúa descargada	334	-209,428	-383,388
	Grúa con carga máxima (1,15 tn) y sin contrapeso	1515	-4479	1448
	Grúa descargada y sin contrapeso	1478	-4168	1476

Tabla 5. Tensiones y desplazamientos máximos de la grúa en condiciones de trabajo

En la tabla 5 se han marcado en tono rojizo los estados en los que se produciría el fallo de la grúa debido a una rotura de la estructura, en amarillo los estados en los que se produciría una plastificación local sin llegar a fallar y en verde aquellos estados en los que la grúa, pese a estar trabajando, en algunos de los casos, en condiciones que no son óptimas, no sufriría ni fallo ni plastificación local.

Es interesante destacar la diferencia de resistencia a flexión que presenta la grúa estando girada respecto de la posición inicial (en la posición inicial las tensiones son menores en todos los estados), lo que es importante considerar a la hora de poner la estructura en funcionamiento. De hecho, en los estados en los que falla el contrapeso, tanto estando la grúa cargada como descargada, si se encuentra girada se producirá un fallo de la estructura, mientras que estando en la posición inicial sólo se generaría, en el peor de los casos, una zona de plastificación local en la zona de unión de la torre, la flecha y la contraflecha.

*Desplazamientos positivos hacia arriba y negativos hacia abajo

En las figuras 138 y 139 pueden observarse las diferencias antes mencionadas, estando, fuera del rango de $(-355 \text{ MPa}, 355 \text{ MPa})$, las zonas marcadas en gris.

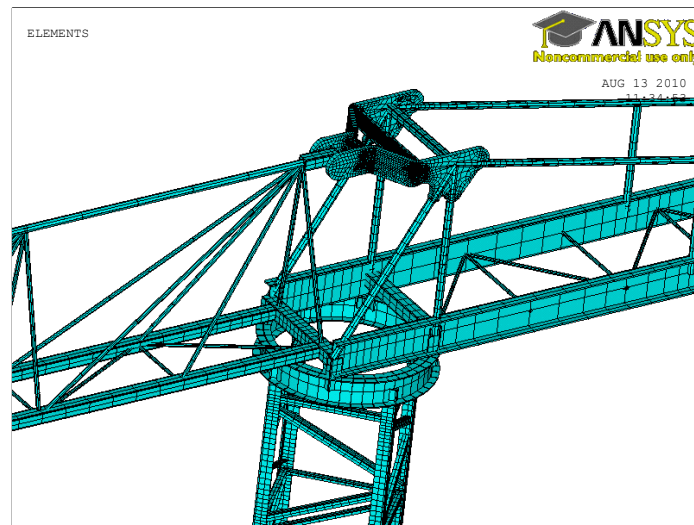


Figura 137. Grúa girada 45° respecto de la posición inicial.

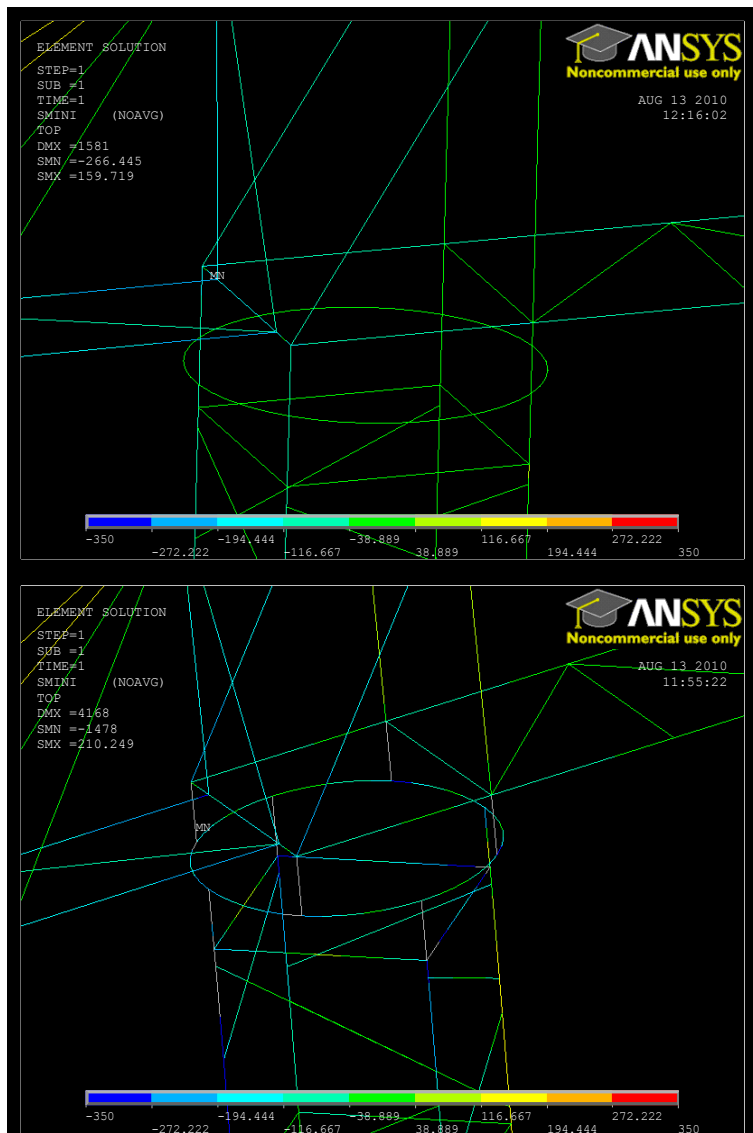


Figura 138. Diferentes estados tensionales de la grúa trabajando sin carga y sin contrapeso en posición inicial y girada

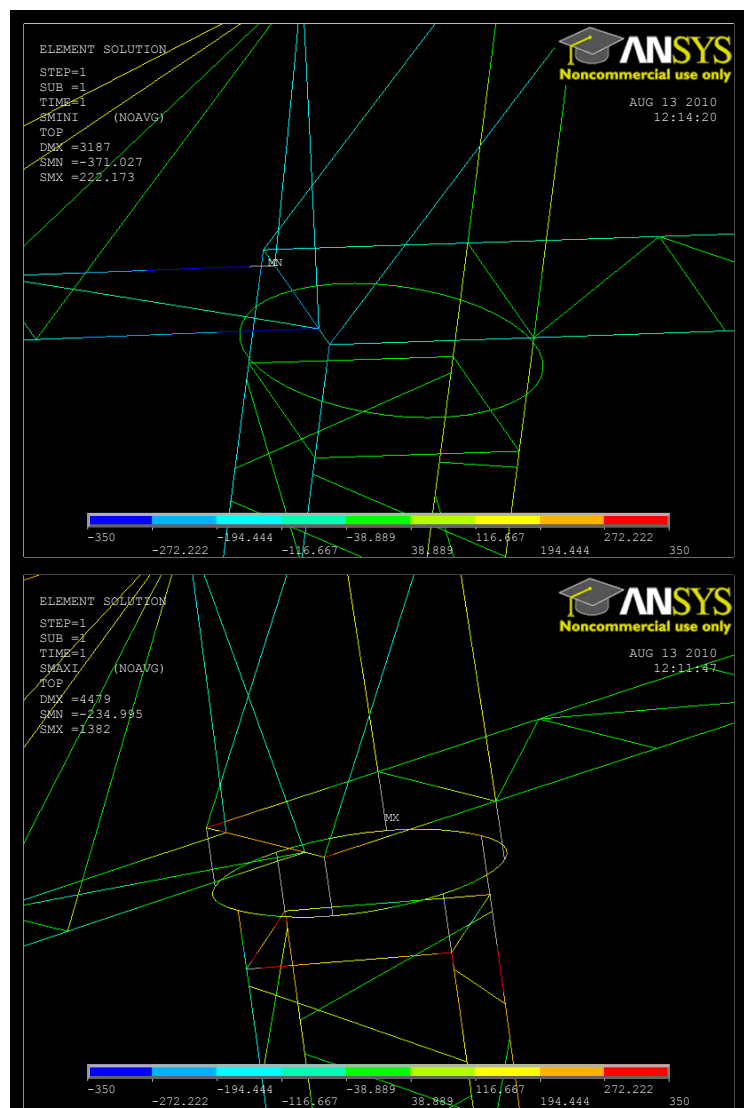


Figura 139. Diferentes estados tensionales de la grúa trabajando con carga máxima sin contrapeso en posición inicial y girada

Por último, se debe analizar el exceso de carga que soporta la grúa en condiciones habituales, es decir, cuando el contrapeso trabaja adecuadamente. En esta situación, y según se puede ver en la tabla 2, la situación más crítica aparecería cuando la grúa se encuentra girada y está soportando una carga de 1.4 tn. En esta situación aparecería plastificación local, tal y como se observa en la figura 140, por lo que se podría garantizar un coeficiente de seguridad de estado límite último $n = 1.22$, pero la estructura quedaría inutilizada.

Por tanto, el coeficiente de seguridad de estado límite de servicio de la grúa, según el cual no aparecería fallo estructural, vendría definido por un exceso de carga de 1.25 tn, y tendría un valor de $n = 1.09$

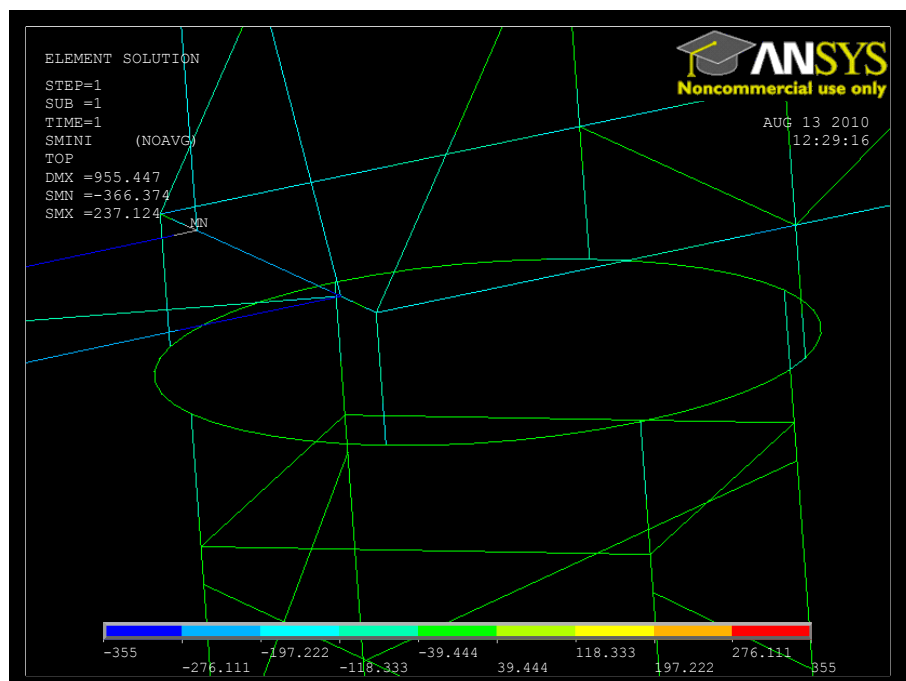


Figura 140. Estado tensional de la grúa girada bajo una carga de 1.4tn. Aparición de plastificación local

6.6 Análisis dinámico

El análisis dinámico de la estructura de la grúa consiste en determinar las frecuencias de vibración y los modos propios. En la tabla 6 se listan las frecuencias naturales obtenidas mediante ANSYS, aplicando la restricción de los desplazamientos en la base de la grúa.

Las diferencias existentes entre las frecuencias de los mismos modos propios de vibración de la grúa en posición inicial y girada son muy pequeñas, por lo que es descartable considerar la influencia de la posición en los modos propios de vibración. En las figuras 141, 142 y 143 pueden observarse los modos propios de vibración 1, 4 y 7.

Las vibraciones pueden afectar a la funcionalidad o durabilidad de las estructuras bajo condiciones de servicio. La adecuada respuesta en servicio de una estructura, o un elemento estructural aislado, debe garantizar el confort de los usuarios, la ausencia de deterioros en la propia estructura, o en los elementos no resistentes soportados por ella, originados por efectos dinámicos y el correcto funcionamiento y durabilidad de posibles maquinarias, servicios, instalaciones, etc., sensibles a estos fenómenos.[20]

Los efectos dinámicos a considerar pueden ser inducidos por maquinarias, movimientos sincronizados de gente (andando, corriendo, bailando o saltando),

sobrecargas de tráfico vial o ferroviario, vibraciones del terreno adyacente y viento. Dichos efectos pueden resultar amplificados por condiciones de resonancia. [20]

Para limitar los efectos vibratorios en las estructuras, los valores de sus frecuencias propias, o de las de elementos estructurales aislados, deben estar suficientemente alejados (generalmente superiores) de las frecuencias de las eventuales fuentes de excitación, con objeto de evitar fenómenos de resonancia [20], por lo que podría decirse que, por las frecuencias propias obtenidas, de muy baja magnitud y que serían normalmente superadas por las frecuencias de los fenómenos antes descritos, existirían bajas posibilidades de que la grúa entrase en resonancia.

Sin embargo, en estructuras, o elementos estructurales, con frecuencias propias bajas, los controles antes comentados pueden no resultar adecuados o suficientes, por lo que debería procederse a un análisis dinámico refinado de la respuesta estructural (amplitudes, velocidades y aceleraciones), que incluya la consideración de los posibles amortiguamientos, lo que no es de interés en el presente proyecto. [20]

	Modo propio	Frecuencias según ANSYS (Hz)
Grúa en posición inicial	1. Torsión de la torre	0.15563E-02
	2. Flexión completa de la torre en plano paralelo a la flecha	0.47822E-02
	3. Flexión completa de la torre en plano perpendicular a la flecha	0.52702E-02
	4. Flexión parcial de torre y flecha en plano paralelo a la flecha	0.14358E-01
	5. Flexión de la flecha en plano horizontal	0.27172E-01
	6. Flexión de la flecha en plano vertical	0.35984E-01
	7. Torsión de la flecha	0.48061E-01
Grúa en girada 45°	1. Torsión de la torre	0.16493E-02
	2. Flexión completa de la torre en plano paralelo a la flecha	0.51044E-02
	3. Flexión completa de la torre en plano perpendicular a la flecha	0.57335E-02
	4. Flexión parcial de torre y flecha en plano paralelo a la flecha	0.12178E-01
	5. Flexión de la flecha en plano horizontal	0.28191E-01
	6. Flexión de la flecha en plano vertical	0.41074E-01
	7. Torsión de la flecha	0.48325E-01

Tabla 6. Modos y frecuencias propias de vibración

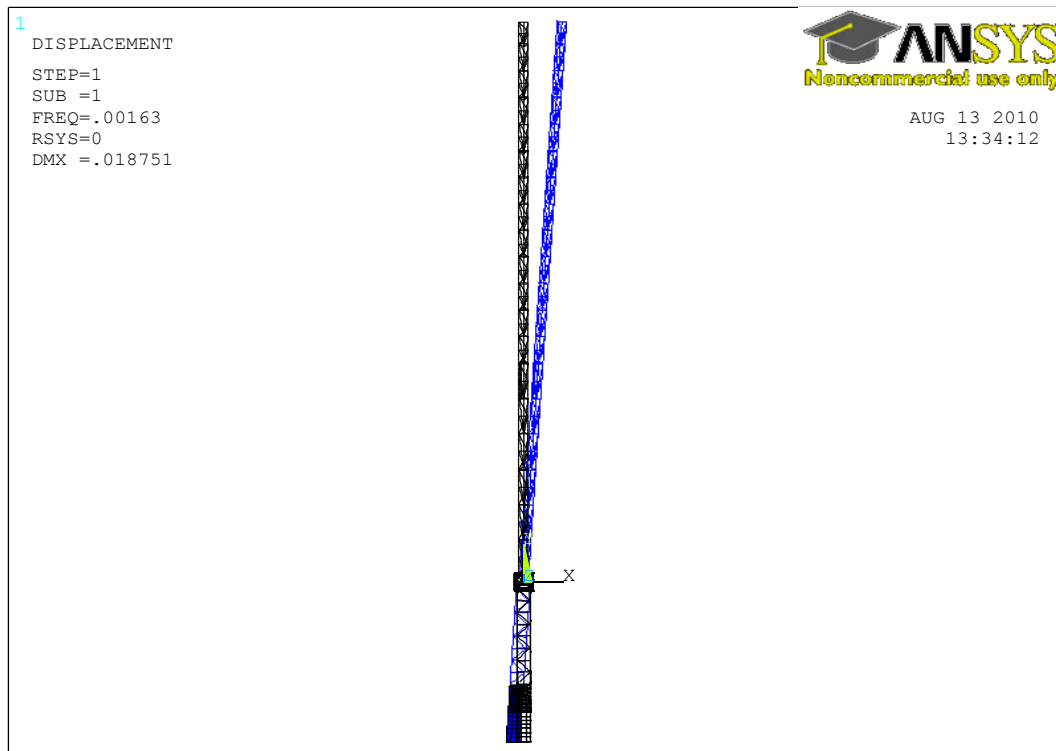


Figura 141. Modo propio de vibración 1: Torsión de la torre (En azul la deformada)

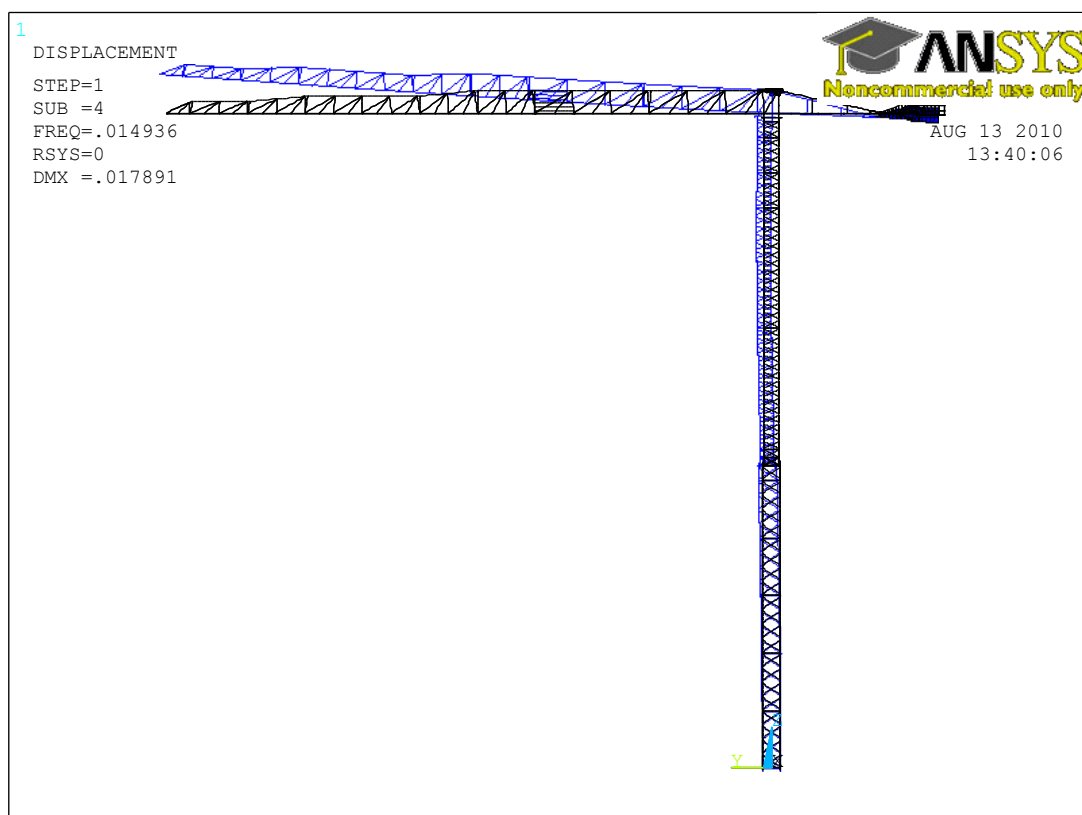


Figura 142. Modo propio de vibración 4: Flexión parcial de torre y flecha.

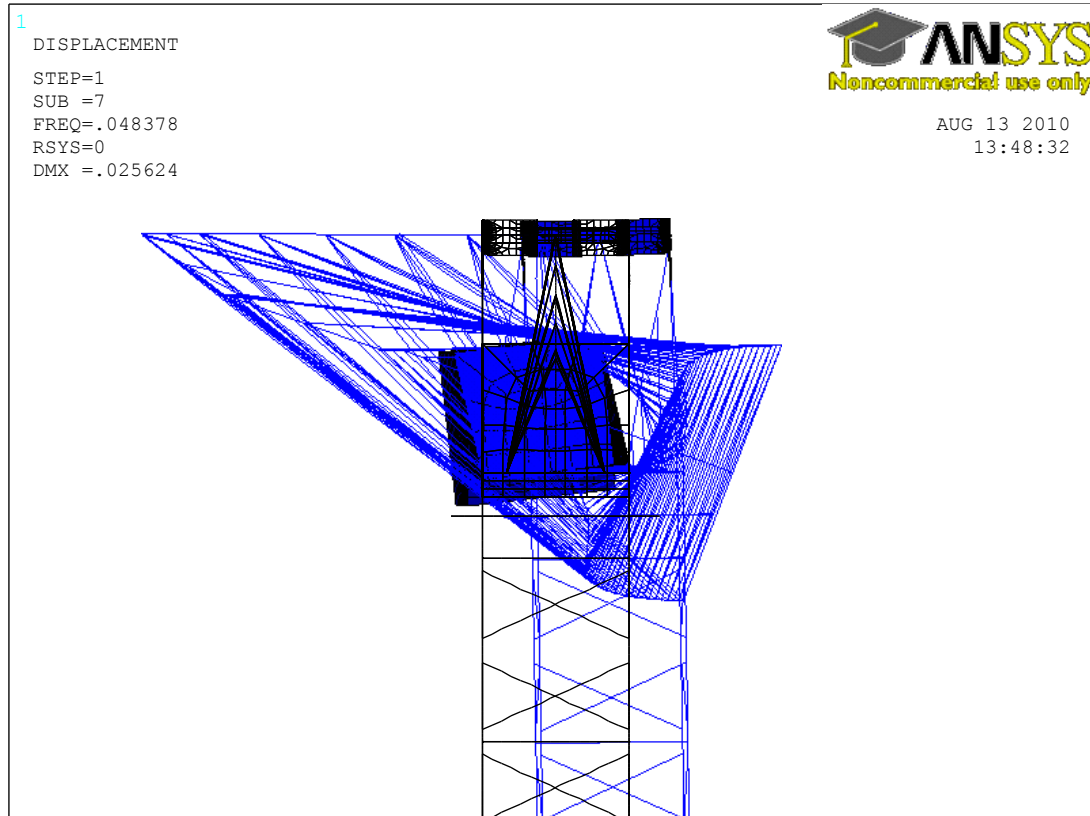


Figura 143. Modo propio de vibración 7: Torsión de la flecha.

Capítulo 7

Conclusiones.

Tras la lectura de toda la información recogida en el presente Proyecto Fin de Carrera así como de los diversos estudios y análisis realizados, considero que los objetivos marcados en el inicio del mismo se ven totalmente satisfechos y, de este modo, se concluye:

1. **En el intento de verificar la integridad estructural de una grúa torre Potain MCT 88** se ha demostrado que, a nivel global, en los casos en los que la misma se encuentra trabajando en las condiciones adecuadas indicadas por el fabricante, e incluso en algunas circunstancias en las que se aplican cargas que exceden las marcadas por éste, las tensiones que se generan sobre la estructura no superan el límite elástico del material (**355 MPa**), por lo que podrían garantizarse condiciones de seguridad idóneas. Sin embargo, se ha determinado que existe una pieza de la grúa (figura 94) en la cual el material supera el límite elástico, pudiendo aparecer zonas de plastificación local. Por tanto, en primera instancia **no se ha podido demostrar que la grúa ofrezca condiciones de seguridad suficientes con el actual diseño.**
2. **Se ha rediseñado con éxito la pieza de la grúa** (figura 119) en la que aparecían tensiones que superaban el límite elástico, hasta lograr que éstas se redujeran lo máximo posible con el fin de garantizar la integridad estructural de la grúa en caso de que fuese factible la ejecución de la

reforma. Con ello, desde el punto de vista del autor, **se ha cumplido, además, el objetivo número 1 de verificación de la seguridad estructural de la grúa torre Potain MCT 88.**

3. **Se ha realizado el cálculo de la grúa torre Potain MCT88 aplicando el método clásico de cálculo marcado por la normativa.** Comparando este método con el de los elementos finitos, se observa que el primero únicamente considera el comportamiento global de la estructura, analizando fundamentalmente los perfiles que la constituyen. El MEF, por su parte, permite profundizar en las soldaduras, bulones y en elementos que el método clásico no considera
4. **Queda demostrado que el cálculo de estructuras a través de elementos finitos es lo suficientemente preciso en lo que se refiere a grúas torre y extensible a cualquier otro tipo de estructura.** Incluso se ha podido detectar un posible error de diseño. Asimismo se comprueba que las posibilidades existentes en el campo de la Ingeniería Civil, a largo plazo, son infinitas pudiendo colaborar al desarrollo de procesos de diseño más seguros, fáciles y rápidos de las construcciones actuales; además de ayudar a predecir con gran exactitud, como se ha visto, las zonas en las que pueden aparecer fallos estructurales.

Capítulo 8

Trabajos futuros.

En este análisis de la grúa torre Potain MCT 88, quedan abiertos una serie de estudios que no han sido objeto de este proyecto y que se proponen contemplar como desarrollo futuro del mismo:

- En el proyecto, únicamente se ha considerado la carga que es directamente aplicada por el usuario de la grúa, la carga generada por el contrapeso y la acción de la gravedad. Por tanto, queda abierto a estudio el análisis de posibles actuaciones sobre la estructura tales como efectos climáticos (nieve, lluvia o viento) o sismos que pudiesen sobrecargar la estructura e, incluso, dar lugar a su colapso.
- Realizar un estudio detallado de las uniones que componen la estructura de la grúa y que no han sido analizadas en el presente proyecto, ya que la resistencia de cada una de ellas puede tener gran influencia en el comportamiento global de la grúa.
- El análisis que los efectos climáticos de lluvia o nieve pueden tener sobre los materiales que componen la estructura metálica de la grúa, así como sobre los componentes eléctricos que forman parte de ella, pudiera ser de gran importancia para mejorar la seguridad de los trabajadores de la construcción.

- Las frecuencias propias que se han obtenido del estudio de la grúa torre tienen un valor muy pequeño, lo que requiere, algo que no ha sido considerado en el presente proyecto. Sería preciso desarrollar un profundo estudio de los modos propios de vibración y de las cargas que podrían generar la entrada en resonancia de la estructura, así como, en caso de que fuese necesario, diseñar un sistema de amortiguamiento que previniese lo anteriormente comentado.

Por otro lado, habiéndose demostrado la validez del método de los elementos finitos para el cálculo estructural, se considera que pueden formar parte de nuevas líneas de investigación las siguientes propuestas:

- Llevar a cabo una optimización de la grúa, ya que como se ha comprobado, las tensiones existentes en la estructura analizada son, en la mayor parte de la misma, mucho menores que el límite elástico. Por ello, a través de aplicaciones que utilicen el método de los elementos finitos se podría reducir la cantidad de material utilizado (y con ello también el peso) en las zonas en las que las tensiones sean mínimas (la mayoría) y reforzar las zonas más críticas (la minoría) con el ahorro económico que ello conllevaría.
- Desarrollar una aplicación informática de elementos finitos dedicada exclusivamente al cálculo de estructuras que no solo ofreciera resultados, sino que también aplicara, sin necesidad de la intervención del proyectista, la normativa vigente; tal y como ocurre en los actuales programas informáticos de diseño estructural.
- Realizar un análisis, a través de aplicaciones informáticas basadas en el método de los elementos finitos, de distintos modelos de grúas con el fin de poner de manifiesto los errores de diseño que pudieran existir en los mismos.

Capítulo 9

Bibliografía.

- [0] <http://www.opgruatorre.org/>, accedido en agosto 2010
- [1] “Grúas torre”, Mariela Edith Cartes Cossio / Tesis doctoral/ Universidad Austral de Chile, 2004.
- [2] <http://www.monografias.com/trabajos32/grua-torre/grua-torre.shtm> /Javier Vega Arias, accedido en agosto 2010.
- [3] “El método de los elementos finitos”, O.C. Zienkiewicz/ Editorial Reverté, 1982.
- [4] “Introducción al método de los elementos finitos”, A. Carnicero/ Universidad Pontificia de Comillas.
- [5] “Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations”, Bulletin of American Mathematical Society, 49 1-43, 1943.
- [6] “Stiffness and deflection analysis of complex structures”, Journal of Aeronautical Sciences, 23, 805-824, 1956.
- [7] “Some aspects of recent contributions to the mathematical theory of finite elements”, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, University of Alabama Press, Huntsville, 1972.

- [8] "Theory of Matrix Structural Analysis"/Mc Graw-Hill, New York, 1968.
- [9] "Stress Analysis", John Wiley, London 1966.
- [10] "The finite elements method in structural and continuum mechanics"/ Mc Graw-Hill, London, 1967.
- [11] "El método de los elementos finitos"/ Mc Graw-Hill CINME, Barcelona, 1994.
- [12] "Diseño de Bogie y vagón destinados a ser utilizados como tolva de carbón", Daniel Varona Cano/ Proyecto Fin de Carrera/ Universidad Carlos III de Madrid.
- [13] <http://almec.files.wordpress.com/2007/10/resumen.pdf>, accedido en agosto 2010.
- [14] "Empleo del método de los elementos finitos para la modelización del comportamiento a fatiga de elementos mecánicos", Alejandro Quesada González/ Tesis doctoral/Universidad Carlos III de Madrid, 2005.
- [15] "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal", Eugenio Oñate/ CINME, 1992.
- [16] "Estrategias para la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales. Métodos de cuasi-Mínimo Residuo Modificados", M. Dolores García León/ Tesis doctoral/ Universidad de las Palmas de Gran Canaria, Marzo de 2003.
- [17] "Simulación de un proceso de embutición mediante ANSYS LS-DYNA", Natalia García Gayol/ Proyecto Final de Carrera/ Universidad Carlos III de Madrid, 2009.
- [18] "Modelo de torsión de la superestructura de un autobús", Antonio Gauchía Babé/ Tesis doctoral/ Universidad Carlos III de Madrid, 2006.
- [19] ANSYS user's guide (versión 12.0, 2009)
- [20] Código Técnico de la Edificación.

Anexo

Aplicaciones y modelos matemáticos de interés en el método de los elementos finitos.

A.1 Flexión de vigas esbeltas. Teoría de Euler-Bernoulli^[15]

A.1.1 Teoría básica

La teoría de vigas clásica, o de Euler-Bernoulli, se basa en las tres hipótesis siguientes:

1. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje de la viga x .
2. El desplazamiento lateral (según el eje y de la figura 144) es nulo.
3. Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación.

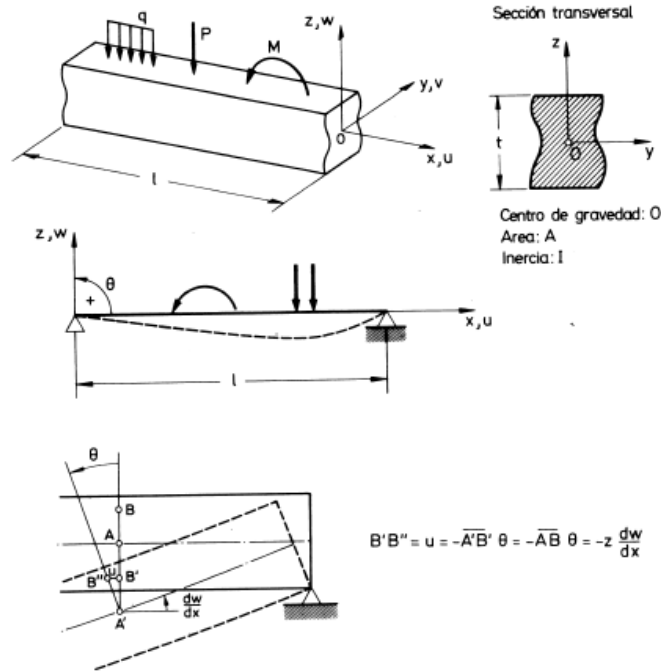


Figura 144. Viga convencional de Euler-Bernoulli

Considérese una viga de longitud l , sección transversal de área A y momento de inercia I sobre la que actúan una serie de cargas verticales y momentos contenidos en el plano xx .

De acuerdo con las hipótesis anteriores, el campo de desplazamientos de un punto cualquiera se puede escribir como:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta(x) \\ v(x, y, z) &= 0 \\ w(x, y, z) &= w(x) \end{aligned}$$

Por la hipótesis 3, el giro θ es igual a la pendiente de la deformada del eje (Figura 144), es decir:

$$\theta = \frac{dw}{dx} \quad y \quad u = -z \frac{dw}{dx}$$

Las deformaciones en un punto se obtienen por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} \\ \varepsilon_x = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

La única tensión no nula σ_x se relaciona con su correspondiente deformación ε_x por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -zE \frac{d^2w}{dx^2}$$

Por otro lado, se define el momento flector positivo M de una sección (Figura 145), como:

$$M = - \iint_A z \sigma_x dA = \iint_A z^2 E \frac{d^2 w}{dx^2} dA = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = EI \chi$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y y χ la curvatura del eje de la viga ($\chi = \frac{d^2 w}{dx^2}$).

Se supondrá que las fuerzas verticales repartidas q tienen sentidos opuestos al establecido como positivo para la flecha y , por otra parte, que los momentos exteriores son positivos si su sentido coincide con el positivo del giro (ver figura 145). En dichas circunstancias, el PTV para la viga se escribe como:

$$\iiint_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = - \int_0^l \delta w q dx + \sum_{i=1}^p \delta w_i Z_i + \sum_{j=1}^q \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_j M_j$$

La integral sobre el volumen de la viga del primer miembro representa el trabajo de deformación virtual y se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV &= \int_0^l \left[\iint_A -z \sigma_x dA \right] \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx = \int_0^l \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \\ &= \int_0^l \delta \chi M dx \end{aligned}$$

Por consiguiente, el trabajo de deformación virtual se puede expresar por la integral sobre la longitud de la viga del producto del momento flector por la correspondiente curvatura virtual. [15]

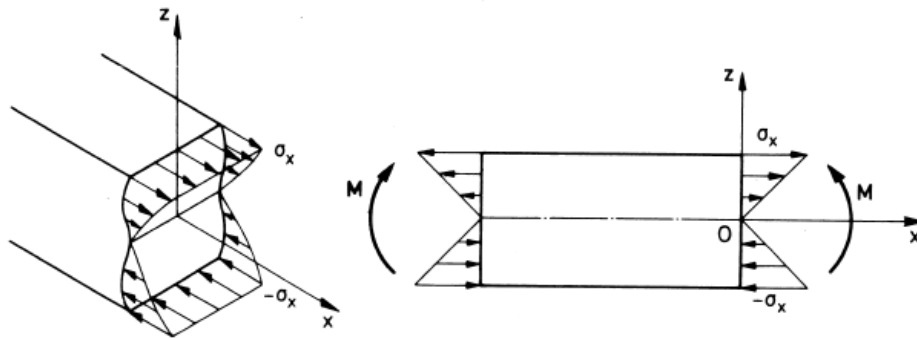


Figura 145. Convenio de signos para la tensión σ_x y el momento flector M .

A.1.2 Discretización en elementos finitos de dos nodos.

La incógnita fundamental del problema es la flecha w . No obstante, debido a que en la expresión del trabajo virtual interno aparecen segundas derivadas de w , se deben utilizar elementos de continuidad de clase C_1 (la primera y segunda derivada deben ser continuas) para evitar singularidades en el cálculo de las integrales. Esta condición se puede interpretar físicamente de manera sencilla teniendo en cuenta que dw/dx coincide con la pendiente de la deformada del eje de la viga. Por tanto, dicha derivada debe ser continua para garantizar que la deformada del eje describa una curva suave.

Así, el elemento más sencillo de viga de clase C_1 es el unidimensional de dos nodos (Figura 146). La continuidad de las primeras derivadas obliga a tomar el giro como variable y, por consiguiente, el número total de variables nodales del elemento es cuatro (la flecha y el giro de cada nodo), que definen perfectamente una variación cúbica de la flecha.

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (A.1)$$

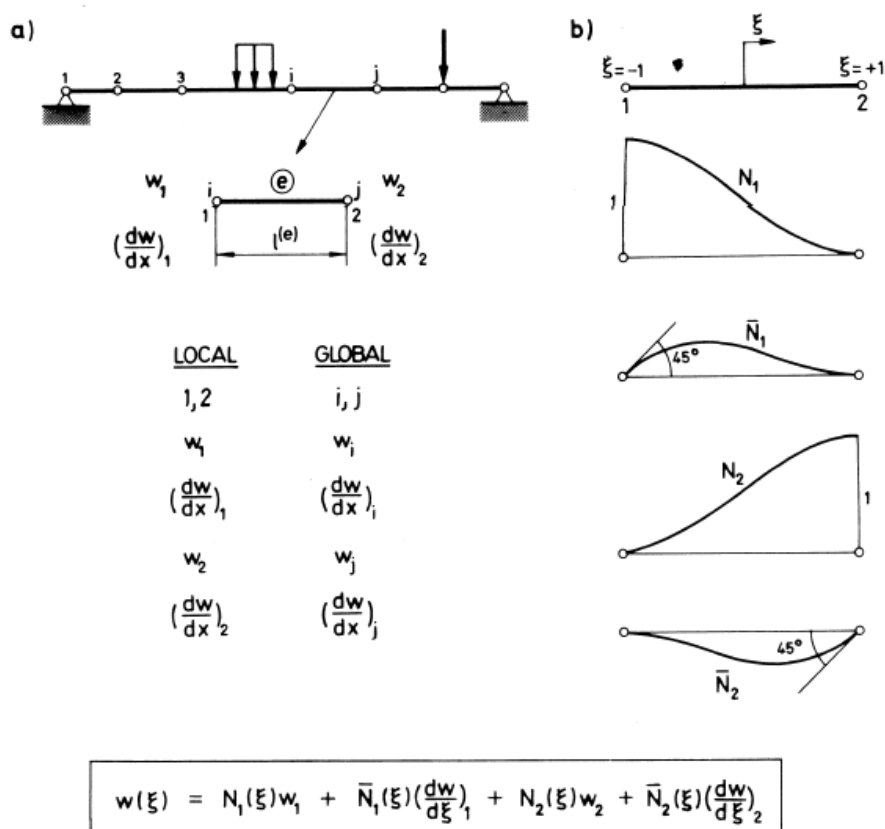


Figura 146. a) Elemento viga de Euler-Bernoulli de dos nodos. b) Variables nodales y funciones de forma Hermíticas

Las constantes α_i se calculan sustituyendo adecuadamente los valores de la flecha y sus derivadas en los nodos en (A.1), lo que proporciona el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} w_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^3 \\ \left(\frac{dw}{dx}\right)_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 x_1 + 3\alpha_3 x_1^2 \\ w_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 \\ \left(\frac{dw}{dx}\right)_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 x_2 + 3\alpha_3 x_2^2 \end{cases}$$

Resuelto este sistema se puede reescribir la ecuación (A.1), tras sustituir convenientemente las expresiones de las α_i , como

$$w = N_1 w_1 + \overline{N}_1 \frac{l^{(e)}}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)_1 + N_2 w_2 + \overline{N}_2 \frac{l^{(e)}}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)_2 \quad (A.2)$$

donde las funciones de forma del elemento vienen dadas por

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) & N_2 &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\ \overline{N}_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) & \overline{N}_2 &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned}$$

$$\text{con } \xi = \frac{2}{l^{(e)}}(x - x_m) \text{ y } x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (A.3)$$

La ecuación (A.2) puede reescribirse como

$$w = Na^{(e)}$$

donde $N = [N_1, \overline{N}_1, N_2, \overline{N}_2]$ y $a^{(e)} = \left[w_1, \left(\frac{dw}{dx}\right)_1, w_2, \left(\frac{dw}{dx}\right)_2\right]^T$ son las matrices de forma y el vector de movimientos (desplazamientos y giros) nodales del elemento.

La aproximación definida por la ecuación (A.2) se denomina Hermítica por coincidir las funciones de forma con polinomios de Hermite¹. La representación gráfica de las cuatro funciones de forma se muestra en la figura 146.

De (A.3) se deduce que $\frac{dx}{d\xi} = \frac{l^{(e)}}{2}$, con lo que

$$dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \quad ; \quad \frac{dw}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{dw}{d\xi} \quad ; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} \quad (A.4)$$

¹ Los polinomios de Hermite se definen como $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$

Por consiguiente la curvatura en un punto del elemento de coordenada ξ se obtiene haciendo uso de (A.2) y (A.4), con lo que resulta

$$\begin{aligned}\chi = \frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{4}{(l^{(e)})^2} \left(\frac{d^2 N_1}{d\xi^2} w_1 + \frac{l^{(e)}}{2} \frac{d^2 \bar{N}_1}{d\xi^2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 + \frac{d^2 N_2}{d\xi^2} w_2 + \frac{l^{(e)}}{2} \frac{d^2 \bar{N}_2}{d\xi^2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \right) = \\ &= \left[\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{(-1+3\xi)}{l^{(e)}}, -\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{(1+3\xi)}{l^{(e)}} \right] \begin{pmatrix} w_1 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \end{pmatrix} = B_f a^{(e)}\end{aligned}$$

siendo B_f la matriz de deformación de flexión o de curvatura del elemento.

Finalmente, la expresión de los trabajos virtuales de un solo elemento quedaría, combinando las expresiones anteriores, como:

$$\begin{aligned}\int_{l^{(e)}} \delta \chi EI_\chi dx &= \left(\int_{-1}^1 [\delta a^{(e)}]^T B_f^T (EI) B_f \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \right) a^{(e)} = \\ &= - \int_{-1}^1 [\delta a^{(e)}]^T N^T \frac{ql^{(e)}}{2} d\xi + \sum_{i=1}^2 \delta w_i Z_i + \sum_{j=1}^2 \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_j M_j\end{aligned}$$

que tras operar en la forma usual conduce a la conocida expresión

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$$

donde la matriz de rigidez del elemento de viga puede calcularse como

$$K^{(e)} = \int_{-1}^1 B_f^T B_f \frac{(EI)l^{(e)}}{2} d\xi = \left(\frac{EI}{l^3} \right)^{(e)} \begin{pmatrix} 12 & 6l^{(e)} & -12 & 6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 & -6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 \\ -12 & -6l^{(e)} & 12 & -6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 & -6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 \end{pmatrix}$$

Asimismo, el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a una carga uniformemente distribuida de intensidad $-q$ sobre el elemento es

$$f^{(e)} = - \int_{-1}^1 N^T \frac{ql^{(e)}}{2} d\xi = -ql^{(e)} \left[\frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{12}, \frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{12} \right]^T$$

y el vector de fuerzas nodales de equilibrio $q^{(e)}$, necesario para el ensamblaje

$$q^{(e)} = [Z_1, M_1, Z_2, M_2]^T$$

A.2 Flexión de vigas de Timoshenko^[15]

A.2.1 Teoría básica

La teoría de vigas de Timoshenko comparte las hipótesis 1 y 2 de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Por contrapartida, la nueva hipótesis 3 establece que ‘‘las secciones planas normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas pero no necesariamente normales al eje después de la deformación’’.

Esta hipótesis representa una mayor aproximación a la deformación real de la sección transversal en vigas de gran canto. A medida que la relación longitud/canto disminuye, las secciones transversales dejan de conservarse planas después de la deformación. Puede verse en la figura 147 que la hipótesis de Timoshenko supone tomar un giro medio para la sección, de manera que a efectos prácticos pueda seguir considerándose plana.

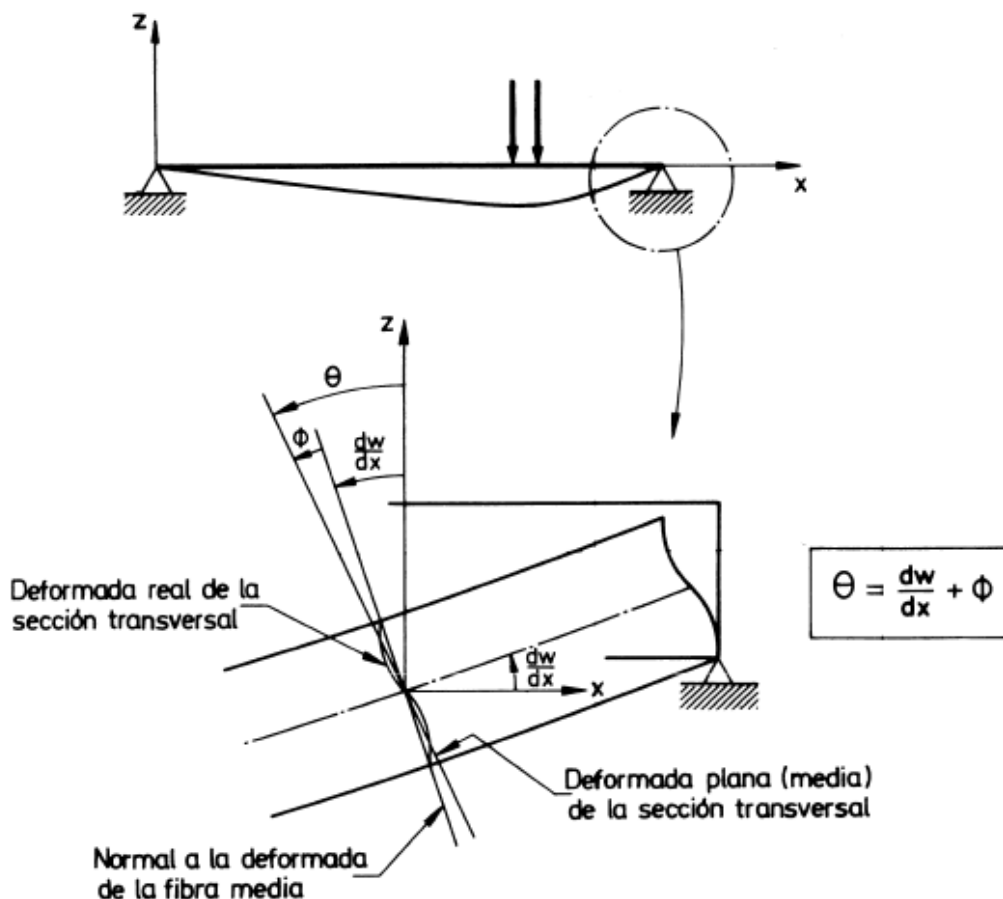


Figura 147. Teoría de flexión de vigas de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media

De la figura 147 se deduce que el giro de la sección normal se puede expresar como

$$\theta = \frac{dw}{dx} + \phi$$

donde $\frac{dw}{dx}$ es la pendiente de la deformada del eje de la viga y ϕ un giro adicional debido a la deformación por cortante como seguidamente se verá.

El campo de desplazamientos de la viga se expresa de manera similar a como ocurre en la teoría de Euler-Bernoulli pero, debido al giro adicional, en este caso resulta

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = -z \frac{d\theta}{dx} \\ \gamma_{xz} &= \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx} - \theta = -\phi\end{aligned}$$

Por consiguiente, la teoría de Timoshenko equivale a considerar el efecto de la deformación por cortante transversal, coincidiendo la magnitud de dicha deformación con el giro adicional de la normal ϕ .

Las dos tensiones no nulas σ_x y τ_{xz} se relacionan con las correspondientes deformaciones por

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E\varepsilon_x = -zE \frac{d\theta}{dx} = -zE\chi \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G\left(\frac{dw}{dx} - \theta\right)\end{aligned}$$

donde G es el módulo de rigidez y $\chi = \frac{d\theta}{dx}$ la curvatura del eje de la viga.

El momento flector y el esfuerzo cortante se definen, de acuerdo con los signos de la figura 148, como

$$\begin{aligned}M &= - \iint_A z\sigma_x dA = EI \frac{d\theta}{dx} = EI\chi \\ Q &= \iint_A \tau_{xz} dA = GA\left(\frac{dw}{dx} - \theta\right) = GA\gamma_{xz}\end{aligned}$$

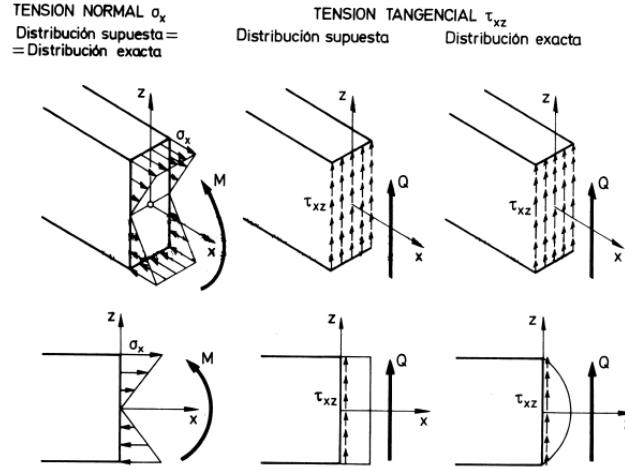


Figura 148. Teoría de vigas de Timoshenko. Distribución de tensiones normales y tangenciales. Convenio de signos para momento flector y esfuerzo cortante

Se puede observar que la variación de σ_x es lineal, lo cual puede considerarse como exacto dentro de la hipótesis de la teoría de vigas. Por el contrario, la variación de la tensión tangencial τ_{xz} con el canto se supone constante, lo cual está en clara contradicción con la distribución polinómica de la teoría de vigas. Para sortear ese problema, teniendo en cuenta que se va a hacer uso de un planteamiento energético a partir del PTV, se acepta la hipótesis de tensión tangencial constante, pero modificada por un coeficiente de manera que el trabajo de deformación de la tensión tangencial constante coincida con el exacto de la teoría de vigas. Así se toma:

$$\tau_{xz} = \alpha G \gamma_{xz} \quad \text{y} \quad Q = \alpha A G \gamma_{xz} = A^* G \gamma_{xz}$$

donde α es el coeficiente de forma o de distorsión de la sección, y $A^* = A\alpha$ se denomina área reducida.

El nombre de coeficiente de distorsión se debe a que tiene en cuenta el efecto de que, en realidad, las secciones no se mantienen exactamente planas y tienen una distorsión longitudinal, tal y como se muestra en la figura 146.

La expresión del PTV se escribe ahora como

$$\iiint_V (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \gamma_{xz} \tau_{xz}) = - \int_0^l \delta w q dx + \sum_{i=1}^p \delta w_i Z_i + \sum_{j=1}^q \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_j M_j \quad (A.5)$$

Combinando las distintas expresiones obtenidas en el desarrollo de la teoría de Timoshenko, el primer miembro de la ecuación (A.5) quedaría

$$\iiint_V \left[-z \sigma_x \delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) + \tau_{xz} \delta \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \right] dV =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^l \left[\delta \chi \left(\iint_A -z \sigma_x dA \right) + \delta \gamma_{xz} \left(\iint_A \tau_{xz} dA \right) \right] dx = \\
 &= \int_0^l [\delta \chi M + \delta \gamma_{xz} Q] dx = \int_0^l \left[\delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) EI \frac{d\theta}{dx} + \delta \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) GA^* \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \right] dx
 \end{aligned}$$

Se observa en esta última ecuación que en el integrando aparece únicamente derivadas primeras de la flecha y el giro. Esto exige solamente su continuidad para garantizar la integrabilidad, lo que permite la utilización de elementos finitos de clase C_0 .

A.2.2 Elementos finitos para la flexión de vigas de Timoshenko.

Se considerará el elemento de viga de Timoshenko más sencillo de dos nodos. A diferencia de la teoría de Euler-Bernoulli, la flecha w y el giro θ son ahora variables independientes y de continuidad C_0 . Así se puede interpolar por separado cada una de ellas por:

$$\begin{aligned}
 w(\xi) &= N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2 \\
 \theta(\xi) &= N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2
 \end{aligned}$$

donde w_1 , θ_1 y w_2 , θ_2 son las flechas y giros de los nodos 1 y 2 el elemento, respectivamente, y $N_1(\xi)$ y $N_2(\xi)$ son las típicas funciones lineales (Figura 149).

Haciendo uso de las expresiones anteriores resulta

$$\chi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d\xi}{dx} \left[\frac{dN_1}{d\xi} w_1 + \frac{dN_2}{d\xi} w_2 \right]$$

y la deformación de cortante será:

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{d\xi}{dx} \left[\frac{dN_1}{d\xi} w_1 + \frac{dN_2}{d\xi} w_2 \right] - [N_1\theta_1 + N_2\theta_2]$$

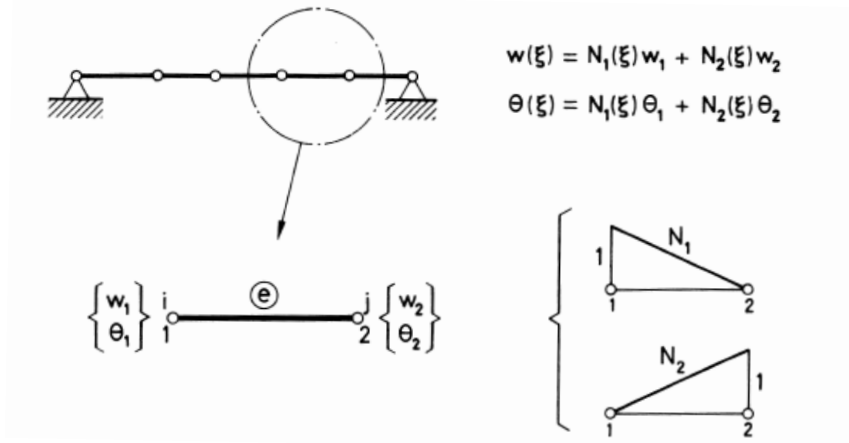


Figura 149. Elemento viga de Timoshenko de dos nodos. Interpolación de los movimientos y funciones de forma

De la misma forma que se hizo en la teoría de Euler-Bernoulli, se pueden escribir las expresiones anteriores de forma matricial como

$$\chi = B_f a^{(e)}$$

$$\gamma_{xz} = B_c a^{(e)}$$

donde

$$B_f = \left[0, \frac{2}{l^{(e)}}, \frac{dN_1}{d\xi}, 0, \frac{2}{l^{(e)}}, \frac{dN_2}{d\xi} \right] = \left[0, \frac{-1}{l^{(e)}}, 0, \frac{1}{l^{(e)}} \right]$$

$$B_c = \left[\frac{2}{l^{(e)}}, \frac{dN_1}{d\xi}, -N_1, \frac{2}{l^{(e)}}, \frac{dN_2}{d\xi}, -N_2 \right] = \left[\frac{-1}{l^{(e)}}, \frac{-(1-\xi)}{2}, \frac{1}{l^{(e)}}, \frac{-(1+\xi)}{2} \right]$$

son las matrices de deformación de flexión y cortante del elemento, y

$$a^{(e)} = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T$$

es el vector de movimientos nodales del elemento.

A través de la combinación de las expresiones anteriores, la expresión de los trabajos virtuales quedaría

$$[\delta a^{(e)}]^T \left(\int_{l^{(e)}} [B_f^T (EI) B_f + B_c^T (GA^*) B_c] dx \right) a^{(e)} =$$

$$= [\delta a^{(e)}]^T \int_{l^{(e)}} \bar{N}^T (-q) dx + [\delta a^{(e)}]^T q^{(e)}$$

y, tras simplificar los movimientos virtuales, resulta

$$[K_f^{(e)} + K_c^{(e)}] a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$$

donde

$$K^{(e)} = K_f^{(e)} + K_c^{(e)}$$

y

$$K_f^{(e)} = \int_{l^{(e)}} [B_f^T (EI) B_f] dx \quad y \quad K_c^{(e)} = \int_{l^{(e)}} [B_c^T (GA^*) B_c] dx \quad (A.6)$$

son las matrices de rigidez correspondientes a los efectos de flexión y cortante cuya suma es la matriz de rigidez total del elemento.

Por otra parte, el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a una carga uniformemente distribuida de intensidad q sobre el elemento es

$$f^{(e)} = - \int_{l^{(e)}} \bar{N}^T(q) dx \quad \text{con} \quad \bar{N} = [N_1, 0, N_2, 0] \quad (A.7)$$

y el vector de fuerzas nodales de equilibrio que permite ensamblar las contribuciones de los distintos elementos en la matriz de rigidez y en el vector de fuerzas globales queda:

$$q^{(e)} = [Z_1, M_1, Z_2, M_2]^T$$

Todas las anteriores integrales pueden transformarse sobre el dominio normalizado del elemento. Así, teniendo en cuenta que $dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$, las ecuaciones (A.6) y (A.7) se escriben como

$$K_f^{(e)} = \int_{-1}^1 [B_f^T (EI) B_f] \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \quad ; \quad K_c^{(e)} = \int_{-1}^1 [B_c^T (GA^*) B_c] \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

y

$$f^{(e)} = - \int_{-1}^1 \bar{N}^T(q) \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

No obstante, la matriz de rigidez del elemento, también puede obtenerse por la expresión general

$$K^{(e)} = \int_{l^{(e)}} [B^T D B] dx$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} B_f \\ B_c \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA^* \end{pmatrix}$$

Sin embargo, el método aquí desarrollado permite identificar las contribuciones de flexión y cortante en la matriz de rigidez, lo que resulta de gran utilidad para integrar $K_f^{(e)}$ y $K_c^{(e)}$ con cuadraturas diferentes.

A.2.3 Elemento de viga de Timoshenko cuadrático.

La simplicidad de la formulación de los elementos viga de Timoshenko permite obtener fácilmente elementos de órdenes superiores. A continuación se considerará el elemento de tres nodos con funciones de forma cuadráticas (Figura 150). En este caso, la flecha y el giro se interpolan como

$$w(\xi) = N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2 + N_3(\xi)w_3$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 + N_3(\xi)\theta_3$$

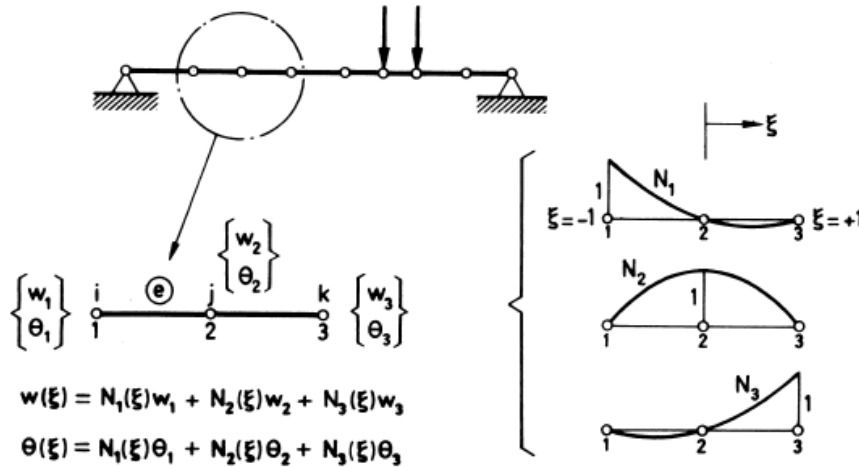


Figura 150. Elemento viga de Timoshenko de tres nodos. Incógnitas nodales y funciones de forma

La geometría puede interpolarse de forma isoparamétrica de la manera siguiente

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3$$

De este modo, la derivada $\frac{dx}{d\xi}$ resulta

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi}x_1 + \frac{dN_2}{d\xi}x_2 + \frac{dN_3}{d\xi}x_3$$

Considerando, por aspectos de sencillez, que el nodo 2 se encontrase en la mitad del elemento, se cumpliría que $\frac{dx}{d\xi} = \frac{l^{(e)}}{2}$.

La curvatura se obtiene por

$$\chi = \frac{d\theta}{dx} = B_f a^{(e)}$$

donde

$$B_f = \left[0, \frac{dN_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, 0, \frac{dN_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, 0, \frac{dN_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right] = \frac{2}{l^{(e)}} \left[0, \xi - \frac{1}{2}, 0, -2\xi, 0, \xi + \frac{1}{2} \right]$$

y

$$a^{(e)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ con } a_i = \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$$

De forma similar, la deformación de cortante se expresa como

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} - \theta = B_c a^{(e)}$$

con

$$B_c = \left[\frac{dN_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, -N_1, \frac{dN_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, -N_2, \frac{dN_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, -N_3 \right] =$$

$$= \frac{2}{l^{(e)}} \left[\xi - \frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{4} (\xi^2 - \xi), -2\xi, \frac{l^{(e)}}{2} (1 - \xi^2), \xi + \frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{4} (\xi^2 + \xi) \right]$$

La matriz de rigidez del elemento y el vector de fuerzas nodales equivalentes debidas a una fuerza q se obtienen de la misma forma que en el caso del elemento de dos nodos:

$$K^{(e)} = K_f^{(e)} + K_c^{(e)}$$

donde

$$K_f^{(e)} = \int_{-1}^1 [B_f^T (EI) B_f] \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \quad ; \quad K_c^{(e)} = \int_{-1}^1 [B_c^T (GA^*) B_c] \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

y

$$f^{(e)} = - \int_{-1}^1 \bar{N}^T(q) \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

con

$$\bar{N} = [N_1, 0, N_2, 0, N_3, 0]$$

A.3 Teoría básica de sólidos tridimensionales.^[15]

A.3.1 Campo de desplazamientos.

Considerando un sólido tridimensional como el que se muestra en la figura 151, el movimiento de un punto en el espacio queda perfectamente definido por las tres componentes del vector de desplazamientos:

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T$$

donde u, v, w son los desplazamientos del punto según los ejes cartesianos x, y, z , respectivamente.

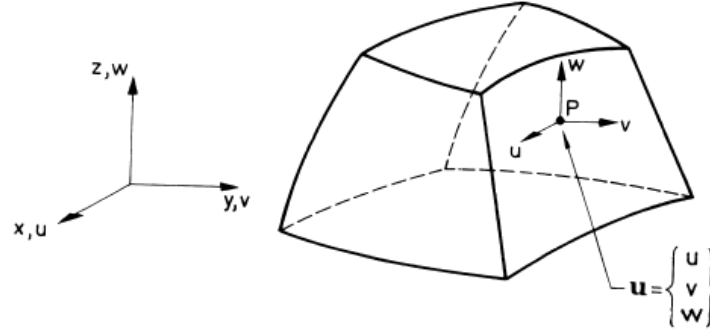


Figura 151. Sólido tridimensional. Vector de desplazamientos en un punto

A.3.2 Campo de deformaciones.

Siguiendo la teoría clásica de la elasticidad tridimensional, el vector de deformación en un punto está definido por seis componentes de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T$$

con

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} ; \quad \tau_{xz} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} ; \quad \tau_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ son las deformaciones normales y $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ las deformaciones tangenciales.

A.3.3 Campo de tensiones.

El vector de tensiones en un punto contiene seis componentes de tensión, conjugadas de las seis respectivas deformaciones. Así

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T$$

donde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son las tensiones normales y $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ son las tensiones tangenciales. En la figura 152 se muestran el convenio de signos de dichas tensiones.

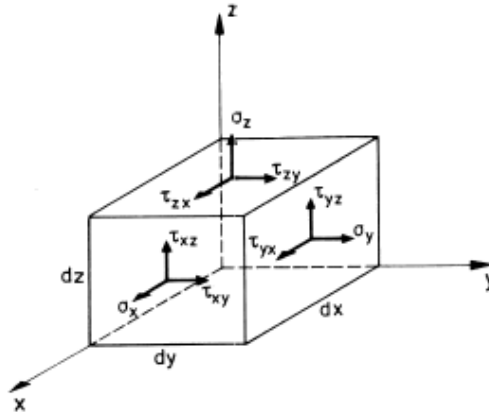


Figura 152. Convenio de signos para las tensiones en un elemento diferencial sólido tridimensional

A.3.4 Relación tensión-deformación.

La relación entre las seis deformaciones y las seis tensiones viene expresada en el caso más general de elasticidad anisótropa por una matriz constitutiva de tamaño 6x6 simétrica y con veintiún coeficientes independientes. Un caso más simplificado es el del material ortótropo. Si x', y', z' son las direcciones principales de la ortotropía, las relaciones constitutivas pueden escribirse en dichos ejes como:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_x &= \frac{1}{E_{x'}} \sigma'_x - \frac{\nu_{y'x'}}{E_{y'}} \sigma'_y - \frac{\nu_{z'x'}}{E_{z'}} \sigma'_z \\ \varepsilon'_y &= \frac{1}{E_{y'}} \sigma'_y - \frac{\nu_{x'y'}}{E_{x'}} \sigma'_x - \frac{\nu_{z'y'}}{E_{z'}} \sigma'_z \\ \varepsilon'_z &= \frac{1}{E_{z'}} \sigma'_z - \frac{\nu_{x'z'}}{E_{x'}} \sigma'_x - \frac{\nu_{y'z'}}{E_{y'}} \sigma'_y \\ \gamma_{x'y'} &= \frac{\tau_{x'y'}}{G_{x'y'}} ; \quad \gamma_{x'z'} = \frac{\tau_{x'z'}}{G_{x'z'}} ; \quad \gamma_{y'z'} = \frac{\tau_{y'z'}}{G_{y'z'}}\end{aligned}$$

donde únicamente intervienen nueve parámetros independientes del material, ya que la simetría de la matriz constitutiva exige que:

$$\begin{aligned}E_{x'} \nu_{y'x'} &= E_{y'} \nu_{x'y'} \\ E_{y'} \nu_{z'y'} &= E_{z'} \nu_{y'z'} \\ E_{z'} \nu_{x'z'} &= E_{x'} \nu_{z'x'}\end{aligned}$$

A través de las ecuaciones anteriores se obtienen las relaciones entre tensiones y deformaciones en ejes locales x', y', z' , que luego debe transformarse a ejes globales.

Un caso muy usual en la práctica es el de elasticidad isótropa en que los nueve coeficientes independientes se reducen a dos: el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν . En dicho caso, la ecuación constitutiva puede escribirse directamente en

ejes globales x, y, z (teniendo en cuenta los vectores de deformaciones y tensiones iniciales) como:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon^0) + \sigma^0$$

y la matriz constitutiva D viene dada por:

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Simétrica

A.3.5 Expresión del principio de los trabajos virtuales.

La ecuación del PTV se escribe, teniendo ahora en cuenta el carácter tridimensional del análisis, de la siguiente manera:

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iiint_V \delta u^T b dV + \iint_A \delta u^T t dA + \sum_i \delta a_i^T q_i$$

donde V y A son el volumen y la superficie del cuerpo sobre los que actúan las fuerzas de masa b , de superficie t y puntuales q_i , respectivamente.

A.3.6 Formulación de elementos finitos. Particularización para el elemento tetraédrico de cuatro nodos.

A.3.6.1 Discretización del campo de desplazamientos.

Se considera un sólido tridimensional discretizado en elementos tetraédricos de cuatro nodos (Figura 153). El campo de desplazamientos en el interior de un elemento se puede aproximar por:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\ N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i a_i^{(e)}$$

donde

$$N = [N_1, N_2, N_3, N_4] \quad ; \quad N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

y

$$a^{(e)} = \begin{Bmatrix} a^{(e)}_1 \\ a^{(e)}_2 \\ a^{(e)}_3 \\ a^{(e)}_4 \end{Bmatrix} ; \quad a^{(e)}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$

son, respectivamente, la matriz de funciones de forma y el vector de desplazamientos del elemento y de un nodo.

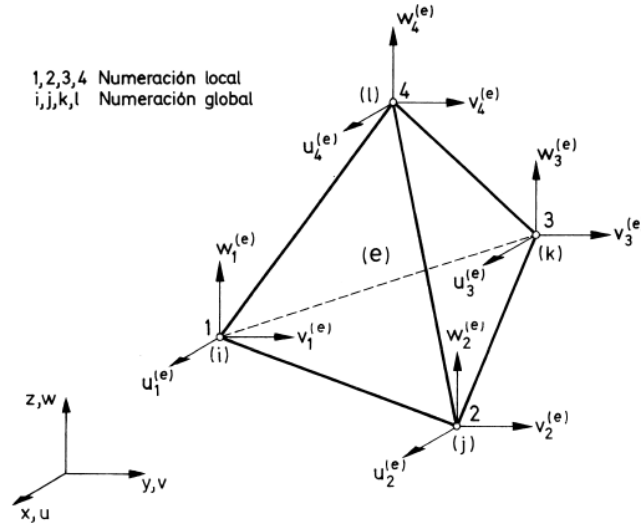


Figura 153. Elemento tetraédrico de cuatro nodos

Cuatro nodos definen una variación lineal de los desplazamientos en las coordenadas xyz de manera que la expresión analítica de las funciones de forma N_i se puede escribir:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{aligned}$$

Las constantes α_i se obtienen sustituyendo adecuadamente las coordenadas de los nodos e igualando los desplazamientos a sus valores nodales. Como se ha utilizado la misma aproximación para todos los desplazamientos, basta con calcular las cuatro constantes para un solo desplazamiento. Así, considerando el desplazamiento u :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 z_1 \\ u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 z_2 \\ u_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 z_3 \\ u_4 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 z_4 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema anterior y sustituyendo los valores de α_i encontrados se define, tras una ordenación de los términos:

$$u = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{6V^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i$$

de donde se deduce que la función de forma del nodo i es:

$$N_i = \frac{1}{6V^{(e)}}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i$$

donde $V^{(e)}$ es el volumen del elemento, y

$$\begin{aligned} a_i &= \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} & ; & \quad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix} \\ c_i &= \det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} & ; & \quad d_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Obteniéndose, así, los distintos coeficientes para los valores de $i = 1, 2, 3, 4$ mediante la adecuada permutación cíclica de los subíndices i, j, k, l .

A.3.6.2 Matriz de deformación.

Sustituyendo la aproximación del campo de desplazamientos en la expresión del campo de deformaciones, se obtiene, para un elemento genérico de n nodos:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta N_i}{\delta x} u_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} v_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta z} w_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} u_i + \frac{\delta N_i}{\delta x} v_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta z} u_i + \frac{\delta N_i}{\delta x} w_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta z} v_i + \frac{\delta N_i}{\delta y} w_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n B_i a^{(e)}_i = B a^{(e)}$$

donde B es la matriz de deformación del elemento dada por:

$$B = [B_1, B_2, B_3, \dots, B_n]$$

siendo B_i la matriz de deformación del nodo i , con:

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_i}{\delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta N_i}{\delta z} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} & \frac{\delta N_i}{\delta x} & 0 \\ \frac{\delta N_i}{\delta z} & 0 & \frac{\delta N_i}{\delta x} \\ 0 & \frac{\delta N_i}{\delta z} & \frac{\delta N_i}{\delta y} \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz de deformación del elemento contiene tantas submatrices como nodos tiene el elemento, en el caso estudiado, se tendrá:

$$B = [B_1, B_2, B_3, B_4]$$

y haciendo uso de la ecuación de forma del nodo i , se obtiene

$$B_i = \frac{1}{6V^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ d_i & 0 & b_i \\ 0 & d_i & c_i \end{bmatrix}$$

A.3.6.3 Matriz de rigidez del elemento.

Sustituyendo la ecuación constitutiva de un elemento isótropo en particular en ejes globales en la ecuación del PTV, se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento:

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$$

donde $K^{(e)}$ es la matriz de rigidez del elemento, $f^{(e)}$ es el vector de fuerzas equivalentes nodales y $q^{(e)}$ es el vector de las fuerzas nodales de equilibrio. La matriz de rigidez tiene la expresión:

$$K^{(e)}_{3n \times 3n} = \iiint_{V^{(e)}} \begin{matrix} B^T & D & B \\ 3n \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 3n \end{matrix} dV$$

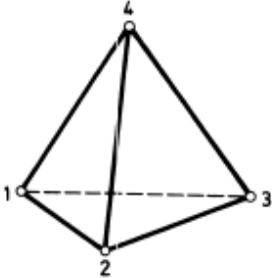
y una submatriz de rigidez típica, relacionando los nodos i y j del elemento, se escribe como:

$$K^{(e)}_{ij \ 3 \times 3} = \iiint_{V^{(e)}} \begin{matrix} B_i^T & D & B_j \\ 3n \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 3n \end{matrix} dV$$

En particular, para el elemento tetraédrico de 4 nodos se puede encontrar una forma explícita sencilla de $K^{(e)}_{ij}$, puesto que todas las cantidades subintegrales son constantes, como:

$$K^{(e)}_{ij} = B^T_i D B_j V^{(e)}$$

La expresión desarrollada de $K^{(e)}_{ij}$ para este elemento se representa en la figura 154.



$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} \\ & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} \\ \text{Simétrica} & & \mathbf{K}_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \frac{1}{36V^{(e)}} \begin{bmatrix} (d_{11}b_i b_j + d_{44}c_i c_j + d_{55}d_i d_j) & (d_{12}b_i c_j + d_{44}c_i b_j) & (d_{13}b_i d_j + d_{55}d_i b_j) \\ (d_{21}c_i b_j + d_{44}b_i c_j) & (d_{22}c_i c_j + d_{44}b_i b_j + d_{66}d_i d_j) & (d_{23}c_i d_j + d_{66}d_i c_j) \\ (d_{31}d_i b_j + d_{55}b_i d_j) & (d_{32}d_i c_j + d_{66}c_i d_j) & (d_{33}d_i d_j + d_{55}b_i b_j + d_{66}c_i c_j) \end{bmatrix}$$

d_{ij} son los elementos de la matriz constitutiva \mathbf{D}
 b_i, c_i, d_i son los parámetros de las funciones de forma N_i

Figura 154. Forma explícita de la submatriz de rigidez $K^{(e)}_{ij}$ para el elemento tetraédrico de 4 nodos.

A.3.6.4 Vector de fuerzas nodales equivalentes.

El vector de fuerzas nodales equivalentes $f^{(e)}$ tiene la expresión siguiente:

$$f^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} N^T b dV + \iint_{A^{(e)}} N^T t dA + \iiint_{V^{(e)}} B^T D \varepsilon^0 dV -$$

$$- \iiint_{V^{(e)}} B^T \sigma^0 dV = f^{(e)}_b + f^{(e)}_t + f^{(e)}_\varepsilon + f^{(e)}_\sigma$$

donde la primera integral representa el vector de fuerzas de volumen, la segunda, el de fuerzas de superficie; y la tercera y cuarta los vectores de fuerzas debidas a deformaciones y tensiones iniciales, respectivamente.

Es fácil encontrar una forma explícita del vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento tetraédrico de cuatro nodos, tal y como se muestra a continuación:

- Fuerzas de volumen

$$f^{(e)}_b = \begin{Bmatrix} f^{(e)}_{b1} \\ f^{(e)}_{b2} \\ f^{(e)}_{b3} \\ f^{(e)}_{b4} \end{Bmatrix} = \iiint_{V^{(e)}} N^T b dV$$

con

$$f^{(e)}_{bi} = \iiint_{V^{(e)}} N^T_i b dV = \frac{V^{(e)}}{4} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

- Fuerzas de superficie

$$f^{(e)}_t = \begin{Bmatrix} f^{(e)}_{t1} \\ f^{(e)}_{t2} \\ f^{(e)}_{t3} \\ f^{(e)}_{t4} \end{Bmatrix} = \iint_{A^{(e)}} N^T t dA$$

con

$$f^{(e)}_{ti} = \iint_{A^{(e)}} N^T_i t dA$$

El vector de fuerzas de superficie depende de la cara del elemento sobre el cual actúa la carga. Así, se tiene:

- *Fuerza actuando sobre la cara definida por los nodos 1-2-3*

$$f^{(e)}_t = \frac{A^{(e)}_{123}}{3} = \{t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z, 0, 0, 0\}^T$$

donde $A^{(e)}_{123}$ es el área de la cara del elemento definida por los nodos 1, 2 y 3. Los tres últimos términos son nulos porque N_4 vale 0 sobre dicha cara.

- *Fuerza actuando sobre la cara definida por los nodos 1-2-4*

$$f^{(e)}_t = \frac{A^{(e)}_{124}}{3} = \{t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z, 0, 0, 0, t_x, t_y, t_z\}^T$$

- *Fuerza actuando sobre la cara definida por los nodos 2-3-4*

$$f^{(e)}_t = \frac{A^{(e)}_{234}}{3} = \{0, 0, 0, t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z\}^T$$

➤ *Fuerza actuando sobre la cara definida por los nodos 1-3-4*

$$f^{(e)}_t = \frac{A^{(e)}_{134}}{3} = \{t_x, t_y, 0, 0, 0, t_z, t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z\}^T$$

- Fuerzas debidas a deformaciones iniciales

$$f^{(e)}_\varepsilon = \begin{Bmatrix} f^{(e)}_{\varepsilon 1} \\ f^{(e)}_{\varepsilon 2} \\ f^{(e)}_{\varepsilon 3} \\ f^{(e)}_{\varepsilon 4} \end{Bmatrix} = \iiint_{V^{(e)}} B^T D \varepsilon^0 dV$$

donde

$$f^{(e)}_{\varepsilon i} = \iiint_{V^{(e)}} N^T_i b dV = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} (d_{11}\varepsilon_x^0 + d_{12}\varepsilon_y^0 + d_{13}\varepsilon_z^0)b_i \\ (d_{21}\varepsilon_x^0 + d_{22}\varepsilon_y^0 + d_{23}\varepsilon_z^0)c_i \\ (d_{31}\varepsilon_x^0 + d_{32}\varepsilon_y^0 + d_{33}\varepsilon_z^0)d_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde d_{ij} es el término ij de la matriz constitutiva.

- Fuerzas debidas a tensiones iniciales

$$f^{(e)}_\sigma = \begin{Bmatrix} f^{(e)}_{\sigma 1} \\ f^{(e)}_{\sigma 2} \\ f^{(e)}_{\sigma 3} \\ f^{(e)}_{\sigma 4} \end{Bmatrix} = \iiint_{V^{(e)}} B^T \sigma^0 dV$$

donde

$$f^{(e)}_{\sigma i} = \iiint_{V^{(e)}} B^T \sigma^0 dV = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} b_i \sigma_x^0 + c_i \tau_{xy}^0 + d_i \tau_{xz}^0 \\ b_i \sigma_y^0 + c_i \tau_{xy}^0 + d_i \tau_{yz}^0 \\ b_i \sigma_z^0 + c_i \tau_{xz}^0 + d_i \tau_{yz}^0 \end{Bmatrix}$$

La aproximación lineal del elemento tetraédrico de cuatro nodos le confiere una precisión limitada ya que sólo puede modelar exactamente un campo de tensiones o deformaciones uniforme. Esto implica que en zonas donde se prevean gradientes de tensiones elevados será necesario utilizar mallas más tupidas.

Otra peculiaridad inherente al elemento tetraédrico es la dificultad de la discretización de un sólido en una malla de tetraedros, lo que puede ser un grave problema para el análisis de sólidos con geometría irregular.

A.4 Teoría de placas de Kirchhoff.^[15]

A.4.1 Estado de placa.

Se define como placa al sólido paralelepípedo en el que una de sus dimensiones (el espesor) es mucho más pequeña que las otras dos. La superficie plana equidistante de las caras de mayores dimensiones se denomina plano medio de la placa.

Se define como **estado de placa** al estado de cargas en el que sólo actúan como sollicitaciones externas fuerzas normales al plano medio y momentos cuyos ejes están contenidos en dicho plano, tal y como se puede observar en la figura 155.

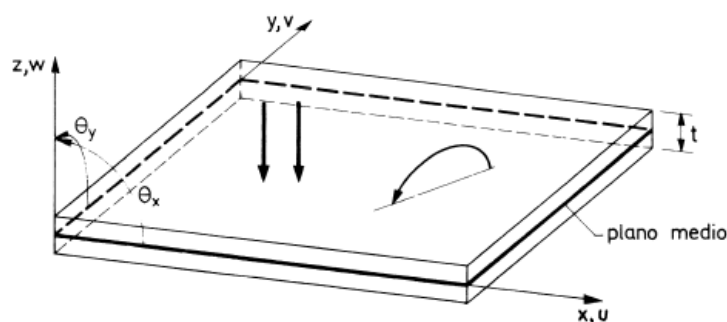


Figura 155. Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros

A.4.2 Hipótesis fundamentales.

Las hipótesis sobre las que se basa la teoría de placas de Kirchhoff son las siguientes:

1. En los puntos del plano medio

$$u = v = 0$$

Es decir, los puntos del plano medio solo se mueven verticalmente.

2. Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical.
3. La tensión normal σ_z es despreciable.
4. Los puntos sobre rectas normales al plano medio antes de la deformación permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.

Las hipótesis 1, 2 y 4 permiten definir el campo de desplazamientos a través del espesor de la placa. La tercera hipótesis afecta a la relación tensión-deformación, que puede modificarse adecuadamente como se verá en el apartado A.4.4.

A.4.3 Campo de desplazamientos.

De las hipótesis 1, 2 y 4 anteriores y de la figura 156 se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \end{aligned} \right\} \text{(1ª y 4ª hipótesis)}$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad \text{(2ª hipótesis)}$$

donde w es el desplazamiento vertical de los puntos del plano medio y θ_x y θ_y son los ángulos que definen el giro de la normal (hipótesis 4) contenidos en los planos xz e yz , respectivamente.

El vector $u = (w, \theta_x, \theta_y)^T$ se denomina vector de movimientos (contiene los desplazamientos y los giros) de un punto del plano medio de la placa.

Por otro lado, de la hipótesis 4 y, también, de la figura 156 se deduce que:

$$\theta_x = \frac{dw}{dx} \quad y \quad \theta_y = \frac{dw}{dy}$$

Es decir, los giros del normal de un punto coinciden con la pendiente del plano medio en ese punto.

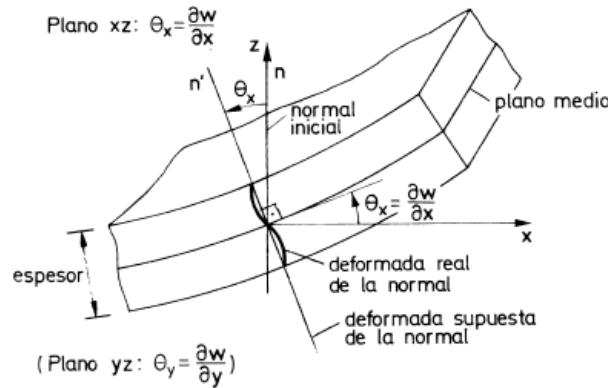


Figura 156. Deformación del plano medio de una placa delgada y giro de la normal

Por consiguiente, el campo de desplazamientos de la placa se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= -z \frac{dw(x, y)}{dx} \\v(x, y, z) &= -z \frac{dw(x, y)}{dy} \\w(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}$$

y el vector de movimientos antes referido que expresado como

$$u = \left(w, \frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy} \right)^T$$

La mayor parte de las teorías de placas se basan en la hipótesis de deformación recta de normal. En realidad esto no es más que una aproximación, pues la sección transversal se distorsiona con la deformación, tal y como se muestra en la figura 156 y el ángulo (θ_x o θ_y) dependen de la altura sobre el plano medio. La hipótesis de deformación recta de la normal equivale a suponer un giro medio uniforme para cada normal, lo que evidentemente simplifica el problema.

Por otro lado, se debe tener en cuenta que la hipótesis de ortogonalidad de la normal sólo se cumple para placas de pequeño espesor (relación espesor/ancho medio, $t/l \leq 0,05$). Para placas de moderado y gran espesor ($t/l \geq 0,10$) la distorsión de la sección aumenta con la deformación de manera que se pierde la ortogonalidad entre la normal media y el plano medio. En estos casos, la teoría de Reissner-Mindlin, que se verá en el apartado A.5, representa una mejor aproximación de la deformación real de la placa. No obstante, si dicha distorsión es excesivamente grande, se debe acudir a la teoría de la elasticidad tridimensional (apartado A.3)

A.4.4 Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos.

De las ecuaciones del campo de desplazamientos y de la elasticidad tridimensional, vista anteriormente, se deduce

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} = -z \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\delta v}{\delta y} = -z \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \quad ; \quad \varepsilon_z \simeq 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} = -2z \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} = 0 \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} = 0\end{aligned}$$

Se concluye, a partir de las expresiones anteriores, que la cuarta hipótesis de Kirchhoff conduce a que las deformaciones transversales γ_{xz} y γ_{yz} son nulas. Por

consiguiente, las tensiones tangenciales transversales no contribuyen a la deformación de la placa. Esto no significa que el valor de dichas tensiones sea insignificante, de hecho puede calcularse posteriormente aplicando el equilibrio entre flectores y cortantes. Es también interesante destacar que la hipótesis 3 conduce a que el trabajo de deformación $\sigma_z \varepsilon_z$ es nulo, por lo que puede prescindirse de la deformación ε_z en el análisis, pudiendo obtenerse posteriormente en función de ε_x y ε_y .

$$\text{El vector } \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \\ -z \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \\ -2z \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.8}) \quad \text{es el vector de deformaciones}$$

independientes de la placa y tiene asociado el correspondiente vector de tensiones $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$. En la figura 157 se indica el convenio de signos.

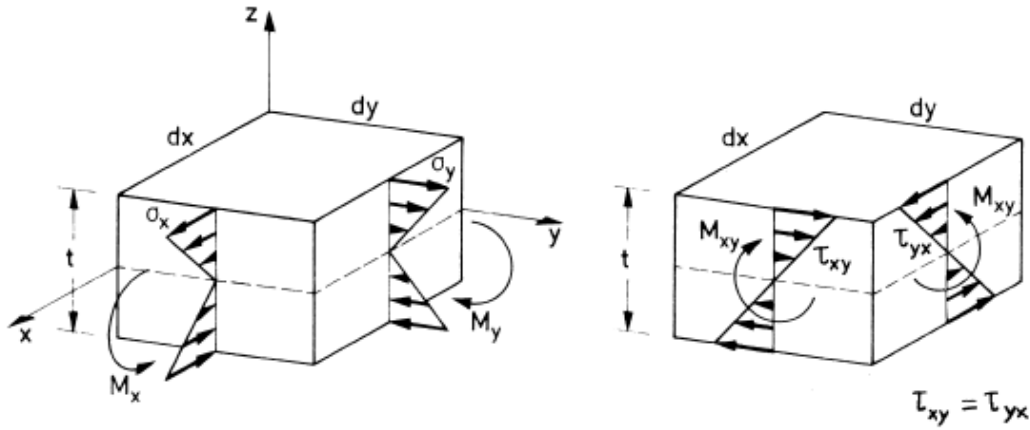


Figura 157. Convenio de signos para tensiones y momentos en una placa

Partiendo de la relación general entre tensiones y deformaciones de la elasticidad tridimensional y considerando que σ_z, γ_{xz} y γ_{yz} son nulas, puede encontrarse una nueva expresión entre las tensiones y deformaciones no nulas. Así, para una placa de material ortótropo con direcciones principales de ortotropía x, y se obtiene:

$$\sigma = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{yx}\nu_{xy})G_{xy} \end{bmatrix} \varepsilon = D\varepsilon \quad (\text{A.9})$$

Para material isótropo, la matriz D para tensión plana sería:

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Por otro lado, el vector de esfuerzos quedaría definido como:

$$\hat{\sigma}_f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma dz \quad (A.11)$$

donde M_x y M_y son los momentos flectores de las tensiones σ_x y σ_y con respecto al plano medio, respectivamente, y M_{xy} es el momento torsor producido por la tensión tangencial τ_{xy} .

Sustituyendo en (A.11) las relaciones (A.10) y (A.8), se encuentra

$$\hat{\sigma}_f = \int_{-t/2}^{t/2} z D \varepsilon dz = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 D \hat{\varepsilon}_f dz = \hat{D}_f \hat{\varepsilon}_f \quad (A.12)$$

donde

$$\hat{D}_f = \frac{t^3}{12} D$$

es la matriz constitutiva de flexión y

$$\hat{\varepsilon}_f = \left[-\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}, \quad -\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}, \quad -2\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right]^T \quad (A.13)$$

es el vector de deformaciones generalizadas de flexión (o vector de curvaturas). Comparando (A.8) y (A.13) se observa que:

$$\varepsilon = z \hat{\varepsilon}_f$$

A.4.5 Expresión del principio de los trabajos virtuales.

Para el caso de carga repartida de intensidad q y fuerzas puntuales W_i (actuando ambas en dirección del eje z), el PTV se escribe:

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iint_A \delta w q dA + \sum_i \delta w_i W_i$$

Las características del problema de flexión de placas permiten simplificar la integral de volumen del trabajo virtual en otra sobre el plano medio de la placa en función de los esfuerzos y las deformaciones generalizadas. Así, haciendo uso de (A.8), (A.9) y (A.12), se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iiint_V (z \delta \hat{\varepsilon}_f^T) \sigma dV = \\ &= \iint_A \delta \hat{\varepsilon}_f^T \left[\int_{-t/2}^{t/2} z \sigma dz \right] dA = \iint_A \delta \hat{\varepsilon}_f^T \hat{\sigma}_f dA \end{aligned} \quad (A.14)$$

De este modo, operándose con los esfuerzos y las deformaciones generalizadas, el estudio de un problema de flexión de placas adquiere un carácter bidimensional, ya que todas las integrales y variables del problema son función únicamente de las coordenadas del plano medio de la placa.

Es interesante desarrollar (A.14) como:

$$\delta U = - \iint_A \left[\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} M_x + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} M_y + 2 \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} M_{xy} \right] dA$$

pues en dicha expresión se aprecia claramente que el trabajo de deformación virtual de la placa puede obtenerse a partir de las contribuciones del trabajo que realizan cada uno de los momentos sobre las curvaturas correspondientes.

A.4.6 Ecuaciones de equilibrio de la placa.

En la teoría de Kirchhoff es particularmente interesante encontrar las ecuaciones de equilibrio en función de los esfuerzos. Dichas ecuaciones permiten calcular los esfuerzos cortantes una vez conocidos los movimientos. Asimismo, la ecuación diferencial de equilibrio de la placa en función de la flecha ha sido extensamente utilizada para encontrar soluciones analíticas a problemas de placas delgadas de geometría sencilla.

Estableciendo el equilibrio de esfuerzos en un elemento diferencial de placa (figura 158), se deducen fácilmente las ecuaciones siguientes:

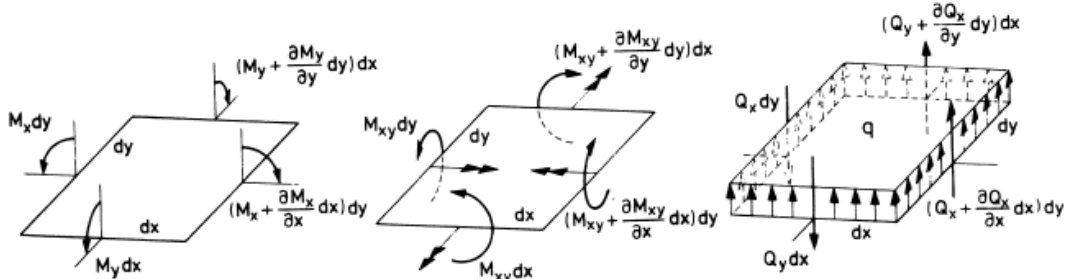


Figura 158. Esfuerzos en un elemento diferencial de placa

- Equilibrio de fuerzas verticales

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\delta Q_x}{\delta x} dx \right) dy + \left(\frac{\delta Q_y}{\delta y} dy \right) dx + q dx dy = 0$$

dividiendo por $dx dy$

$$\frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} + q = 0 \quad (A.15)$$

- Equilibrio de momentos

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \left(\frac{\delta M_y}{\delta y} dy \right) dx + \left(\frac{\delta M_{xy}}{\delta x} dx \right) dy - \left(Q_y + \frac{\delta Q_y}{\delta y} dy \right) dx dy - \left(\frac{\delta Q_x}{\delta x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + q dx dy \frac{dy}{2} = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \left(\frac{\delta M_x}{\delta x} dx \right) dy + \left(\frac{\delta M_{xy}}{\delta y} dy \right) dx - \left(Q_x + \frac{\delta Q_x}{\delta x} dx \right) dy - \left(\frac{\delta Q_y}{\delta y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + q dx dy \frac{dx}{2} = 0$$

y despreciando términos de segundo orden

$$\frac{\delta M_y}{\delta y} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} - Q_y = 0 \quad (A.16)$$

$$\frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta y} - Q_x = 0 \quad (A.17)$$

Diferenciando (A.16) y (A.17) con respecto a y y x , respectivamente, y sustituyendo en (A.15) se obtiene:

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} = -q$$

Finalmente, haciendo uso de (A.12) pueden sustituirse los momentos en función de la flecha, obteniéndose, para un material isótropo:

$$\frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} = \frac{q}{D}$$

o $\nabla^4 w = \frac{q}{D}$ (A.18) con $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ que es una ecuación diferencial de cuarto orden que relaciona la flecha con la carga repartida y las propiedades del material. Dicha ecuación con sus correspondientes condiciones de contorno, es el punto de partida para resolver analíticamente problemas de placas isótropas.

Una vez calculada la flecha por integración de (A.18), los momentos flectores en cada punto se obtienen a partir de (A.12). Por otra parte, sustituyendo (A.12) en (A.16) y (A.17) se deducen las expresiones de los esfuerzos cortantes:

$$Q_x = -D \left(\frac{\delta^3 w}{\delta x^3} + \frac{\delta^3 w}{\delta x \delta y^2} \right)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\delta^3 w}{\delta y^3} + \frac{\delta^3 w}{\delta y \delta x^2} \right)$$

A.4.7 Formulación de elementos finitos.

La forma intuitiva más sencilla de satisfacer los requisitos de continuidad C_1 para la flecha es tomar, similarmente a como se hacía con elementos de vigas de Euler-Bernoulli, la flecha y sus dos giros como variables nodales.

Se obtienen tres variables por nodo $w_i, \left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)_i, \left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)_i$ y el número total de variables de un elemento de n nodos será $3n$. Este número determina el número de términos del polinomio que aproxima w dentro de cada elemento.

De este modo, en general:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \dots \quad (\text{hasta } 3n \text{ términos})$$

El cálculo de las α_i se efectúa imponiendo las condiciones en los nodos

$$\left. \begin{aligned} w_i &= (w)_i \\ \theta_{x_i} &= \left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)_i ; \quad \theta_{y_i} = \left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

lo que proporciona $3n$ ecuaciones.

El problema fundamental reside en la selección adecuada de los términos del polinomio, ya que en general suele haber varias alternativas. Cada una de ellas define un elemento distinto, como los triangulares y cuadrangulares ya vistos en el apartado 4.5.3.

A.5 Teoría de placas de Reissner-Mindlin.^[15]

A.5.1 Hipótesis fundamentales.

La teoría de placas de Reissner-Mindlin se obtiene a partir de la teoría de Kirchhoff relajando la hipótesis de ortogonalidad de la normal durante la deformación de la placa. De este modo, se mantienen las tres primeras hipótesis de la teoría de Kirchhoff y, por el contrario, la hipótesis cuarta sobre ortogonalidad de la normal se modifica como sigue:

“4. Los puntos que antes de la deformación estaban sobre la normal al plano medio de la placa, permanecen, al deformarse sobre una misma recta, sin que ésta tenga que ser necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio.”

Esta hipótesis es análoga a la establecido para el giro de la sección en la teoría de vigas de Timoshenko.

A.5.2 Campo de desplazamientos.

De las hipótesis 1, 2 y 4 se deduce que:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\w(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}$$

donde θ_x y θ_y son los ángulos que definen el giro de la normal. Puede comprobarse que el campo de desplazamientos anterior coincide con el expresado para la teoría de Kirchhoff, por lo que el vector de movimientos, también de igual forma, se define:

$$u = (w, \theta_x, \theta_y)^T$$

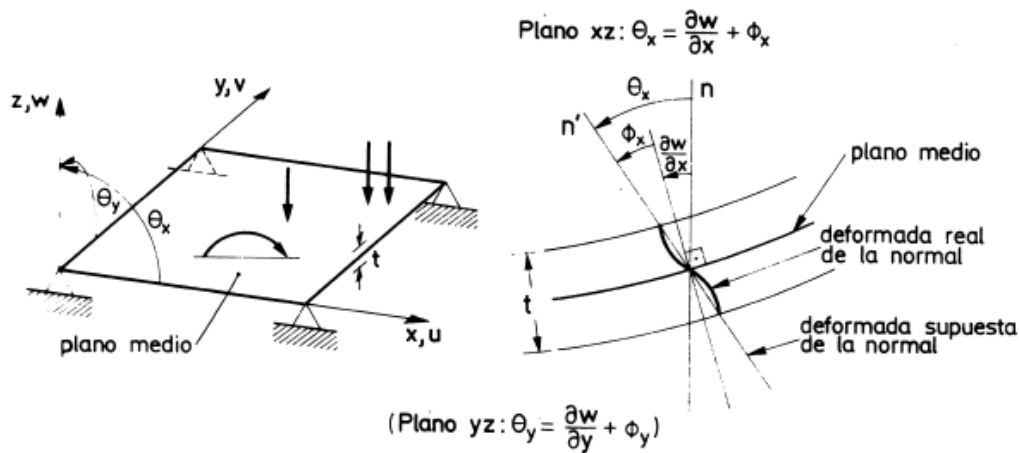


Figura 159. Teoría de placas de Reissner-Mindlin. Convenio de signos para los movimientos y giro de la normal

De la hipótesis 4 sobre el giro de la normal se tiene (ver figura 159)

$$\theta_x = \frac{dw}{dx} + \phi_x$$

e igualmente en el plano yz

$$\theta_y = \frac{dw}{dy} + \phi_y$$

Es decir, los giros de la normal en un punto se componen de dos términos: los primeros, $\frac{dw}{dx}$ y $\frac{dw}{dy}$, son debidos al cambio de pendiente del plano medio. Los segundos, ϕ_x y ϕ_y , se deben al giro adicional de la normal al no permanecer necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio. De este modo, los giros de la normal no pueden obtenerse únicamente en función de la pendiente del plano medio, como ocurría con la teoría de Kirchhoff. Esto permite considerar dichos giros como variables independientes, siendo ésta la diferencia sustancial entre ambas teorías de placas.

También es de destacar que la hipótesis 4 establece que las normales al plano medio se mantienen rectas después del giro, lo que implica que la distribución de tensiones tangenciales es constante sobre el espesor. En realidad, esto no es más que una aproximación pues, las normales inicialmente rectas se distorsionan durante la deformación, siendo esta distorsión más importante cuanto mayor sea el espesor de la placa. Así pues, los giros deben interpretarse de nuevo como valores medios de la deformada real de la normal.

A.5.3 Campo de deformaciones y tensiones.

Para obtener el campo de deformaciones se parte de la definición general de las deformaciones en tres dimensiones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} ; \quad \tau_{xz} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} ; \quad \tau_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y}\end{aligned}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones el campo de movimientos, se obtiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\delta x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\delta y} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z} = 0 \\ \tau_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\delta y} + \frac{\partial \theta_y}{\delta x} \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} = -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} = -\phi_x \\ \tau_{yz} &= \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} = -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} = -\phi_y\end{aligned}$$

Es apreciable que la hipótesis de no ortogonalidad de la normal se traduce en que las deformaciones transversales τ_{xz} y τ_{yz} no son nulas, siendo su valor absoluto el de los giros ϕ_x y ϕ_y . Asimismo, dichas deformaciones, y por consiguiente sus respectivas tensiones, son independientes de la coordenada z .

Puesto que por la hipótesis 3, la tensión normal σ_z es nula, se puede definir el vector de tensiones no nulas por:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \dots \\ \sigma_c \end{Bmatrix}$$

donde σ_f y σ_c representan los vectores de tensiones debidas a efectos de flexión y cortante transversal, respectivamente. El criterio de signos para las "tensiones de flexión" σ_x, σ_y y τ_{xy} coincide con el de la figura 158. Por otra parte, los signos

positivos para las tensiones de cortante transversal τ_{xz} y τ_{yz} se muestran en la figura 160.

Por analogía, puede definirse el vector de deformaciones asociado al de tensiones:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \dots \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \dots \\ -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} \\ -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_f \\ \dots \\ \epsilon_c \end{Bmatrix}$$

donde ϵ_f y ϵ_c son, respectivamente, los valores de deformaciones de flexión y de cortante transversal.

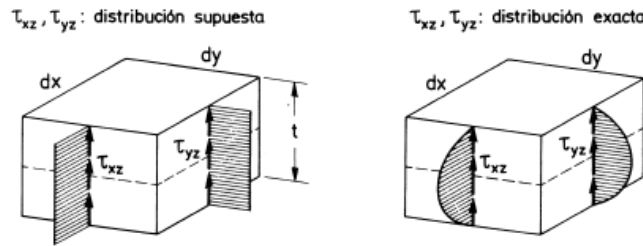


Figura 160. Convenio de signos para las tensiones τ_{xz} y τ_{yz}

A.5.4 Relación tensión-deformación.

Partiendo de la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional y haciendo uso de que σ_z es nula, se puede encontrar la siguiente relación entre las tensiones no nulas y sus deformaciones asociadas.

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & D'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_f \\ \dots \\ \epsilon_c \end{Bmatrix} = D \epsilon \quad (A.19)$$

siendo D_f y D'_c las matrices constitutivas de flexión y cortante, respectivamente, que para elasticidad ortótropa se escriben como:

$$D_f = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{yx}\nu_{xy})G_{xy} \end{bmatrix}$$

$$D'_c = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix}$$

Para un material isótropo:

$$E_x = E_y = E \quad ; \quad v_{yx} = v_{xy} = v$$

$$G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = \frac{E}{2(1+v)}$$

Debido al campo de desplazamientos supuesto, la distribución de deformaciones $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ y τ_{xy} es lineal en z y, por consiguiente, también lo es el de las correspondientes tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} . Por otra parte, la distribución de deformaciones γ_{xz} y γ_{yz} es constante a lo largo del espesor, y lo mismo sucede con las correspondientes tensiones τ_{xz} y τ_{yz} .

No obstante, de acuerdo con la teoría de la elasticidad, la distribución "exacta" de las tensiones tangenciales transversales no es constante a través del espesor. Generalmente, esta distribución tiene forma polinómica con valores nulos en los planos inferior y superior de la placa. Por ello, se le aplica a las tensiones tangenciales transversales un coeficiente de manera que el trabajo de deformación de las mismas coincida con el realizado por las tensiones transversales exactas. De esta forma se puede afirmar que el trabajo de deformación global de la placa coincide con el exacto, aunque localmente las tensiones tangenciales no tengan la distribución correcta. Por ello, en la práctica, el vector σ_c se escribe como:

$$\sigma_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 G_{xz} & 0 \\ 0 & \alpha_2 G_{yz} \end{bmatrix} \varepsilon_c = D_c \varepsilon_c \quad (A.20)$$

donde α_1 y α_2 son los coeficientes de distorsión transversal cuyo valor habitual en placas de espesor constante y material homogéneo es $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5}{6}$.

A.5.5 Esfuerzos y deformaciones generalizadas.

Se define el vector de esfuerzos en un punto del plano medio como:

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \dots \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z\sigma_x \\ z\sigma_y \\ z\tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z\sigma_f \\ \dots \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dz \quad (A.21)$$

donde $\hat{\sigma}_f$ y $\hat{\sigma}_c$ son los vectores de momentos flectores y esfuerzos cortantes, respectivamente. En la figura 161 se muestra el convenio de signos para los esfuerzos:

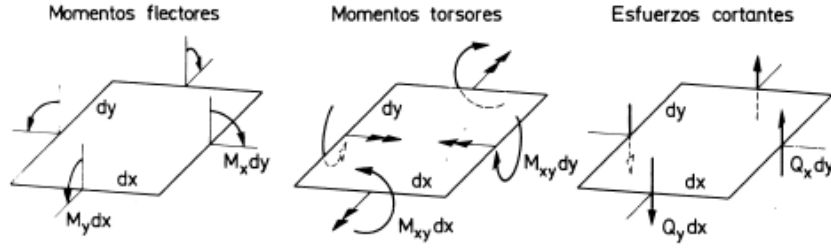


Figura 161. Convenio de signos para los esfuerzos en una placa

La ecuación (A.21) se puede modificar haciendo uso de las ecuaciones (A.19) y (A.20), como:

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z D_f \varepsilon_f \\ \dots \\ D_c \varepsilon_c \end{Bmatrix} dz$$

y operando

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z D_f \varepsilon_f \\ \dots \\ D_c \varepsilon_c \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z D_f \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \\ \dots \\ D_c \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} \\ -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} dz = \\ &= \begin{Bmatrix} \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \right) D_f \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \\ \dots \\ \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} dz \right) D_c \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} \\ -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{t^3}{12} D_f \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ t D_c \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widehat{D}_f \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \widehat{D}_c \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} \quad (A.22) \end{aligned}$$

donde $\widehat{D}_f = \frac{t^3}{12} D_f$ y $\widehat{D}_c = t D_c$ son las matrices constitutivas generalizadas de flexión y cortante, respectivamente. Por otra parte, la relación entre los vectores de deformación y los de deformación generalizada sería:

$$\varepsilon_f = z \hat{\varepsilon}_f \quad ; \quad \varepsilon_c = \hat{\varepsilon}_c$$

Con ello, la ecuación (A.22), se puede reescribir como:

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{D}_f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \widehat{D}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} = \widehat{D} \hat{\varepsilon}$$

A.5.6 Principio de los trabajos virtuales.

Para mayor simplicidad, se considerará la expresión de los trabajos virtuales en una placa sobre la cual actúa únicamente una cara uniformemente distribuida q y fuerzas puntuales W_i (actuando ambas en dirección del eje z). La igualdad entre el trabajo de deformación interno virtual y el de las fuerzas exteriores se escribe de la forma clásica

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iint_A \delta w q dA + \sum_i \delta w_i W_i$$

Se expresa ahora el trabajo de deformación virtual en función de los esfuerzos y las deformaciones generalizadas virtuales:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV &= \iiint_V \delta [z \hat{\varepsilon}_f^T, \hat{\varepsilon}_c^T] \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} dV = \iiint_V \delta \hat{\varepsilon}^T \begin{Bmatrix} z \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dV = \\ &= \iint_A \delta \hat{\varepsilon}^T \left[\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dz \right] dA = \iint_A \delta \varepsilon^T \hat{\sigma} dA \end{aligned}$$

Por consiguiente, operando con esfuerzos y deformaciones generalizadas el problema de flexión de placas adquiere un carácter bidimensional, ya que todas las integrales que aparecen en el PTV son en dos dimensiones.

A.5.7 Formulación de elementos finitos.

A.5.7.1 Discretización del campo de movimientos.

El plano medio de la placa se discretiza en una malla de elementos isoparamétricos de clase C_0 (Figura 162). Se supone que cada elemento tiene n nodos. Puesto que la flecha y el giro son variables independientes, puede efectuarse la interpolación del vector de movimientos u . Así se tiene:

$$u = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} N_i w_i \\ N_i \theta_{x_i} \\ N_i \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{x_n} \\ \theta_{y_n} \end{Bmatrix} =$$

$$= [N_1, N_2, \dots, N_n] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = N a^{(e)}$$

donde

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_n] \quad , \quad a^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad , \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix}$$

son las matrices de forma y el vector de movimientos del elemento y de un nodo i , respectivamente.

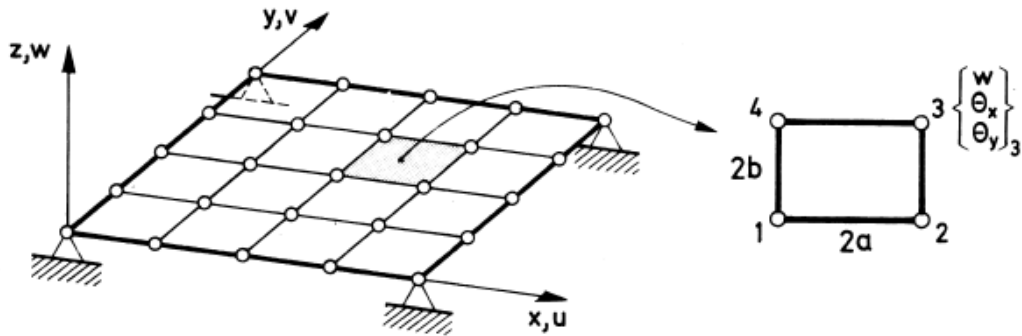


Figura 162. Discretización de una placa con elementos placa de Reissner-Mindlin rectangulares de cuatro nodos.

A.5.7.2 Discretización del campo de deformaciones generalizadas.

El vector de deformaciones generalizadas puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\delta x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\delta y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\delta y} + \frac{\partial \theta_y}{\delta x}\right) \\ \dots \\ -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} \\ -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\delta x} \theta_{x_i} \\ -\frac{\partial N_i}{\delta y} \theta_{y_i} \\ -\left(\frac{\partial N_i}{\delta y} \theta_{x_i} + \frac{\partial N_i}{\delta x} \theta_{y_i}\right) \\ \dots \\ -N_i \theta_{x_i} + \frac{\delta N_i}{\delta x} w_i \\ -N_i \theta_{y_i} + \frac{\delta N_i}{\delta y} w_i \end{Bmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} B_{fi} \\ B_{ci} \end{Bmatrix} a_i^{(e)} = [B_1, \dots, B_n] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix} = B a^{(e)} \end{aligned}$$

donde B y B_i son la matriz de deformación generalizada del elemento y del nodo i , respectivamente. De la ecuación anterior se puede deducir:

$$B_i = \begin{Bmatrix} B_{fi} \\ \dots \\ B_{ci} \end{Bmatrix}$$

con

$$B_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\delta x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\delta y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\delta y} & -\frac{\partial N_i}{\delta x} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\delta x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\delta y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}$$

donde B_{fi} y B_{ci} son las matrices de deformaciones generalizadas de flexión y de cortante transversal asociadas al nodo i , respectivamente.

A.5.7.3 Obtención de la matriz de rigidez del elemento.

Aplicando el PTV al dominio discretizado de un elemento, se tiene:

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \varepsilon^T \hat{\sigma} dA - \iint_{A^{(e)}} \delta w q dA = \sum_i \delta w_i W_i$$

Operando se obtiene la clásica expresión:

$$\left[\iint_{A^{(e)}} B^T \hat{D} B dA \right] a^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} N t dA = q^{(e)}$$

o

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$$

donde

$$K^{(e)}_{ij} = \iint_{A^{(e)}} B^T_i \hat{D} B_j dA$$

$$f^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} N_i [q, 0, 0]^T dA$$

$$q^{(e)} = [W_i, 0, 0]^T$$

son la submatriz de rigidez que conecta los nodos ij , el vector de fuerzas nodales equivalentes del nodo i debido a una carga repartida vertical, y el vector de fuerzas nodales de equilibrio del nodo i , respectivamente.

Se puede transformar la expresión de la matriz de rigidez del elemento en la forma siguiente:

$$K^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} [B^T_f, B^T_c] \hat{D} \begin{Bmatrix} B_f \\ B_c \end{Bmatrix} dA = \iint_{A^{(e)}} [B^T_f \hat{D} B_f + B^T_c \hat{D} B_c] dA = K^{(e)}_f + K^{(e)}_c$$

donde

$$K^{(e)}_f = \iint_{A^{(e)}} B^T_f \hat{D} B_f dA$$

$$K^{(e)}_c = \iint_{A^{(e)}} B^T_c \hat{D} B_c dA$$

son las matrices de rigidez que contienen términos de flexión y cortante, respectivamente. Obtener la matriz de rigidez del elemento como suma de las dos matrices anteriores es más económico que calcular directamente la matriz total.

A.5.7.4 Otros vectores de fuerzas nodales equivalentes.

En el apartado anterior se obtuvo el vector de fuerzas nodales equivalentes para el caso de una carga repartida vertical sobre el elemento. La expresión de dicho vector para otros casos de carga es muy sencilla. Así, si también actúan momentos distribuidos, la expresión de $f^{(e)}_i$ es

$$f^{(e)}_i = \iint_{A^{(e)}} N_i \begin{Bmatrix} q \\ m_x \\ m_y \end{Bmatrix} dA$$

donde m_x y m_y son los momentos repartidos correspondientes a los giros θ_x y θ_y , respectivamente.

El caso del peso propio es similar al de la fuerza repartida vertical. Así pues, si ρ es la densidad del material de la placa, se tiene (suponiendo que el peso actúa en dirección contraria al eje z)

$$f^{(e)}_i = \iint_{A^{(e)}} N_i \rho t \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dA$$

Finalmente, el vector de fuerzas puntuales de un nodo puede escribirse de forma genérica como:

$$q^{(e)} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix}$$

donde W_i , M_{xi} y M_{yi} son, respectivamente, la fuerza puntual vertical y los momentos según θ_x y θ_y actuando en el nodo i .

A.6 Análisis modal: Método de Lanczos.

A.6.1 Conceptos previos. El método de Arnoldi.

El programa informático de elementos finitos utilizado durante el desarrollo del presente proyecto (ANSYS 12) ofrece varios métodos para la obtención de autovalores y autovectores en un sistema de n grados de libertad con objeto de hallar las frecuencias y modos propios de vibración. El método utilizado fue el de Block Lanczos. Éste está disponible para problemas de gran tamaño de autovalores con simetría.

El algoritmo de pivote por bloques de Lanczos (Block Lanczos) es la base teórica de este extractor de autovalores. Este algoritmo es una variación del algoritmo de Lanczos clásico, que se explicará en el apartado A.6.2 debido a que se opera usando un bloque de vectores, en lugar de un solo vector.

El método de Lanczos es una simplificación del método de Arnoldi. Éste último se basa en reducir una matriz densa a una matriz de Hessenberg cuyos autovalores (obtenidos en un número de pasos menor que n) proporcionan una aproximación exacta de algunos de los autovalores de la matriz original, a la vez genera un sistema de vectores ortonormados. [16]

ALGORITMO DE ARNOLDI

Elegir un vector $v_1 / \|v_1\| = 1$
 Desde $j = 1, \dots, k$ hacer
 Desde $i = 1, \dots, j$ hacer
 $\{H\}_{ij} = \langle Av_j, v_i \rangle$;
 $w_j = Av_j - \{H\}_{ij}v_i$;
 Fin
 $\{H\}_{j+1,j} = \|w_j\|$. Si $\{H\}_{j+1,j} = 0$ parar
 $v_{j+1} = \frac{1}{\{H\}_{j+1,j}} w_j$;
 Fin

Los vectores v_1, v_2, \dots, v_k obtenidos en el algoritmo de Arnoldi forman una base del subespacio de Krylov,

$$K_k(A; v_1) = C.L. \{v_1, Av_1, A^2v_1, \dots, A^{k-1}v_1\}$$

Estos vectores $v_j (j = 1, \dots, k)$ son ortonormados por construcción. Cada vector del subespacio $K_k(A; v_1)$ es de la forma $q_{j-1}(A)v_1$, donde q_{j-1} es un polinomio de grado $j-1$. Asumiendo que el resultado es válido para todo entero $i \leq j$ y considerando v_{j+1} , entonces,

$$h_{j+1,j}v_{j+1} = Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i = Aq_{j-1}(A)v_1 - \sum_{i=1}^j h_{ij}q_{j-1}(A)v_1$$

Por tanto v_{j+1} puede ser expresado como $q_j(A)v_1$, donde q_j es de grado j . Llamando V_k a la matriz $n \times k$ cuyas columnas son los vectores v_j con $j = 1, \dots, k$; \bar{H}_k a la matriz $(k+1) \times k$ de Hessemberg, cuyas entradas no nulas h_{ij} son obtenidas en el algoritmo de Arnoldi, y H_k a la matriz obtenida eliminando la última fila de \bar{H}_k se puede comprobar que:

$$\begin{aligned} AV_k &= V_k H_k + w_k e_k^T = V_{k+1} \bar{H}_k \\ H_k &= V_k^T AV_k \end{aligned}$$

A.6.2 Método de Lanczos. [16]

El método de Lanczos es una simplificación del método de Arnoldi para el caso de matrices simétricas, ya que los coeficientes h_{ij} generados por el algoritmo son tales que,

$$\begin{cases} h_{ij} = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq j-1 \\ h_{j,j+1} = h_{j+1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

con lo que la matriz H_k obtenida del proceso de Arnoldi es tridiagonal y simétrica.

La solución estándar del método es

$$\begin{cases} h_{ij} = \alpha_i \\ h_{j-1,j} = \beta_j \end{cases}$$

y denotando por T_k la matriz resultante del algoritmo de Lanczos,

$$T_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \beta_{k-1} & \alpha_{k-1} & \beta_k \\ & & & & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$$

ALGORITMO DE LANCZOS

Elegir un vector $v_1 / \|v_1\| = 1, \beta_1 \equiv 0, V_0 \equiv 0$

Desde $j = 1, \dots, k$ hacer

$$\begin{aligned} w_j &= Av_j - \beta_j v_{j-1}; \\ \alpha_j &= \langle w_j, v_j \rangle; \\ w_j &= Av_j - \alpha_j v_j; \\ \beta_{j+1} &= \|w_j\|. \text{ Si } \beta_{j+1} = 0 \text{ parar} \\ v_{j+1} &= \frac{1}{\beta_{j+1}} w_j; \end{aligned}$$

Fin

A.6.3 Método de Lanczos para sistemas simétricos. [16]

La aplicación del método de Lanczos a los sistemas de ecuaciones se realiza de la siguiente forma:

Dada una aproximación inicial x_0 del sistema de matriz simétrica, definida positiva $Ax = b$, y obtenidos los vectores $v_i (i = 1, 2 \dots)$ del algoritmo de Lanczos, junto con la matriz tridiagonal T_k , la solución aproximada obtenida por un método de proyección ortogonal sobre K_k viene dada por,

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + V_k y_k \\ y_k &= T_k^{-1} (\beta e_1) \end{aligned}$$

ALGORITMO DE LANCZOS PARA SISTEMAS LINEALES

Aproximación inicial x_0 . $r_0 = b - Ax_0, \beta = \|r_0\|, v_1 = r_0/\beta$

Desde $j = 1, \dots, k$ hacer

$$w_j = Av_j - \beta_j v_{j-1} \text{ (si } j = 1 \text{ poner } \beta_1 v_0 \equiv 0);$$

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \langle w_j, v_j \rangle; \\ w_j &= Av_j - \alpha_j v_j; \\ \beta_{j+1} &= \|w_j\|; \\ v_{j+1} &= \frac{1}{\beta_{j+1}} w_j;\end{aligned}$$

Fin

Tras la aplicación del algoritmo se generan las matrices $T_k = \text{tridiag}(\beta_i, \alpha_i, \beta_{i+1})$ y $V_k = [v_1, v_2, \dots, v_k]$, se resuelve $T_k y_k = \beta e_1$ y se calcula $x_k = x_0 + V_k y_k$, donde el vector residuo de la solución aproximada x_k es tal que,

$$b - Ax_k = -\beta_{k+1} e_k^T y_k v_{k+1}$$